Scuole italiane all'estero • Europa

Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 5 quesiti del questionario.
Durata massima della prova: 6 ore.
È consentito l'uso della calcolatrice non programmabile.

PROBLEMA 1

Sei il responsabile del controllo della navigazione della nave indicata in figura 1 con il punto P. Nel sistema di riferimento cartesiano Oxy le posizioni della nave P, misurate negli istanti $t = 0$ e $t = 10$ (il tempo t è misurato in minuti, le coordinate x e y sono espresse in miglia nautiche), sono date dai punti $P_1(14; 13)$ e $P_2(12; 11)$. Negli stessi istanti la posizione di una seconda nave Q è data dai punti $Q_1(12; -2)$ e $Q_2(11; -1)$. Entrambe le navi si muovono in linea retta e con velocità costante, come rappresentato in figura 1 (non in scala).

L'area indicata con ZMP è una «Zona Marittima Pericolosa». Il raggio luminoso di un faro posto nel punto F di coordinate $(0; 1)$ spazza un quarto di un cerchio di raggio 10 miglia (vedi figura 1).

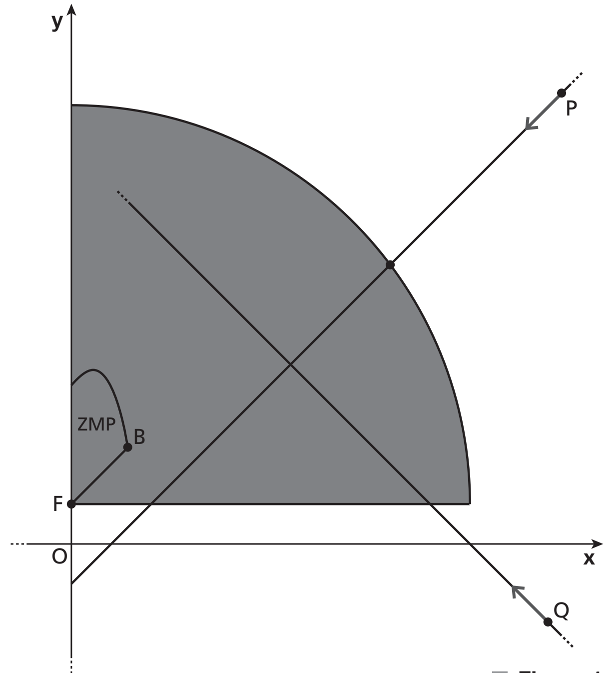

Figura 1

1. Calcola dopo quanto tempo, rispetto all'istante in cui la nave P avvista per la prima volta il faro F, essa raggiunge la minima distanza dal faro, e la misura di tale distanza.
2. Determina la posizione della nave P nell'istante in cui per la prima volta la sua distanza dalla nave Q è pari a 9 miglia.
3. Determina l'istante t nel quale la distanza tra le due navi è minima e calcola il valore di tale distanza.

Nel punto $B(X_B; Y_B)$ si trova una boa che segnala l'inizio della ZMP. La delimitazione della ZMP può essere descritta dai grafici delle funzioni f e g che si intersecano nel punto B e sono definite da:

$$f(x) = -x^3 + x + 4, \; x \in \mathbb{R}, \; 0 \leq x \leq x_B$$

$$g(x) = x + 1, \; x \in \mathbb{R}, \; 0 \leq x \leq x_B$$

e dalla retta $x = 0$.

4. Calcola l'area della ZMP.

PROBLEMA 2

Sia data la famiglia di funzioni $f(x) = \ln\left(\frac{a-x}{x^2+4}\right) + bx$.

1. Determina per quale valore di a e b il grafico della funzione passa per l'origine e ha un massimo nel punto di ascissa 2;
2. trovata l'espressione analitica della funzione, dopo aver definito il campo di esistenza, determina le equazioni degli eventuali asintoti;

3. determina l'area della regione piana delimitata dalla retta tangente alla curva nell'origine, dalla curva stessa e dalla retta passante per il suo punto di massimo e parallela all'asse y;
4. calcola infine il volume del solido generato dalla rotazione attorno all'asse x della parte di piano delimitata dalla tangente in O, dalla bisettrice del primo quadrante e dalla retta passante per il suo punto di massimo e parallela all'asse y.

QUESTIONARIO

1 La funzione $f(x)$ è continua per $x \in [-4; 4]$ il suo grafico è la spezzata passante per i punti:

$(-4; 0)$, $(-3; 1)$, $(-2; 0)$, $(0; -2)$, $(1; 0)$, $(3; 2)$, $(4; 1)$.

Qual è il valor medio di $f(x)$ per $x \in [-4; 4]$?

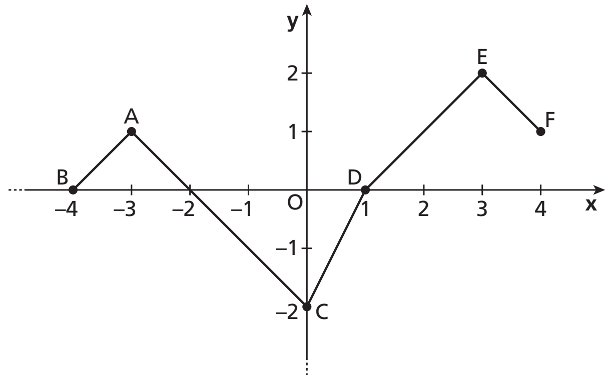

Figura 2

2 Da un'analisi di mercato è risultato che il 32% della popolazione usa il prodotto A. Scelto a caso un gruppo di 12 persone, determinare il valore medio, la varianza e la deviazione standard della variabile casuale X = «numero di persone che usa il prodotto A». Calcolare inoltre la probabilità che, all'interno del gruppo scelto, il numero di persone che usano detto prodotto sia compreso tra 2 e 5, estremi inclusi.

3 In un riferimento cartesiano $Oxyz$, si verifichi che la circonferenza γ, intersezione della sfera di equazione $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ e del piano $z = 1$ ha centro in $(0; 0; 1)$ e raggio $\sqrt{3}$. Si immagini che una sorgente di luce puntiforme S sia situata sul semiasse positivo delle z. A quale distanza dal centro della sfera si deve trovare S affinché γ sia il confine tra la zona della sfera che risulta illuminata e quella che resta in ombra?

4 Sia $P(x) = x^2 + bx + c$. Si suppone che $P(P(1)) = P(P(2)) = 0$ e che $P(1) \neq P(2)$. Calcolare $P(0)$.

5 Risolvere l'integrale improprio: $\int_0^1 \ln(x)dx$.

6 La popolazione di una colonia di batteri è di 4000 batteri al tempo $t = 0$ e di 6500 al tempo $t = 3$. Si suppone che la crescita della popolazione sia esponenziale, rappresentabile, cioè, con l'equazione differenziale $\frac{dy}{dt} = k \cdot y$, dove k è una costante e y la popolazione di batteri al tempo t. Al tempo $t = 10$, la popolazione supererà i 20 000 batteri?

7 Una particella si muove lungo una certa curva secondo le seguenti leggi:

$$x(t) = 3 - 2 \cdot \cos(t),\ y(t) = 2 + 3 \cdot \sin(t).$$

Disegnare la traiettoria percorsa dalla particella per t che va da 0 a 2π secondi e determinare la velocità di variazione di θ, l'angolo formato dalla tangente alla traiettoria con l'asse x, per $t = \frac{2}{3}\pi$ secondi.

8 Se $f(x) = \int_1^{x^3} \frac{1}{1 + \ln(t)} dt$ per $x \geq 1$, qual è il valore di $f'(2)$?

9 Risolvere il seguente problema posto nel 1547 da Ludovico Ferrari a Niccolò Tartaglia:
«Si divida il numero 8 in 2 numeri reali non negativi in modo che sia massimo il prodotto di uno per l'altro e per la loro differenza».

10 Trovare l'equazione della retta perpendicolare al grafico di $f(x) = 4x^3 - 7x^2$ nel punto di ascissa 3.

PROBLEMA 1

1. La nave P occupa la posizione $P_1(14;13)$ all'istante $t=0$ e la posizione $P_2(12;11)$ all'istante $t=10$ minuti.

La nave, in 10 minuti, ha percorso una distanza pari a:

$$d_{1-2}=\sqrt{(14-12)^2+(13-11)^2}=\sqrt{4+4}=2\sqrt{2}\ \text{miglia nautiche (simbolo M)},$$

e mantiene quindi una velocità costante $v=\frac{2\sqrt{2}}{10}=\frac{\sqrt{2}}{5}\simeq 0,28$ M/min.

La traiettoria della nave è individuata dalla retta p passante per i punti P_1 e P_2; determiniamo la sua equazione:

$$p\colon \frac{x-12}{14-12}=\frac{y-11}{13-11}\ \rightarrow\ x-12=y-11\ \rightarrow\ y-x+1=0.$$

L'arco di circonferenza di raggio 10 M individuato dal faro posto in $F(0;1)$ ha equazione:

$$c\colon (x-0)^2+(y-1)^2=10^2\ \rightarrow\ x^2+y^2-2y+1=100\ \rightarrow\ x^2+y^2-2y-99=0,$$

di cui consideriamo solo il tratto con $0\leq x\leq 10$ e $1\leq y\leq 11$.

Calcoliamo le coordinate del punto di intersezione A fra la traiettoria della nave e la circonferenza:

$$\begin{cases}x^2+y^2-2y-99=0\\ y-x+1=0\end{cases}\ \rightarrow\ \begin{cases}x^2+(x-1)^2-2(x-1)-99=0\\ y=x-1\end{cases}.$$

Risolviamo la prima equazione, di secondo grado:

$$x^2+x^2-2x+1-2x+2-99=0\ \rightarrow\ 2x^2-4x-96=0\ \rightarrow\ x^2-2x-48=0\ \rightarrow$$

$$x=1\pm\sqrt{1+48}=1\pm 7\ \rightarrow\ x=8\ \text{(unica soluzione accettabile).}$$

Il punto A ha coordinate $(8;7)$.
Il punto di minima distanza della traiettoria di P dal faro F è dato dalla proiezione H di F sulla retta p.
Le coordinate di H si ottengono intersecando la retta p di coefficiente angolare 1 con la perpendicolare per F a p, che ha coefficiente angolare -1.

$$\begin{cases}y=x-1\\ y=-x+1\end{cases}\ \rightarrow\ \begin{cases}x=1\\ y=0\end{cases}\ \rightarrow\ H(1;0).$$

Il tratto AH è lungo:

$$\overline{AH}=\sqrt{(8-1)^2+(7-0)^2}=\sqrt{7^2+7^2}=7\sqrt{2}\ \text{M}.$$

Per percorrere questo tratto AH, la nave P impiega:

$$\frac{\overline{AH}}{v}=\frac{7\sqrt{2}}{\frac{\sqrt{2}}{5}}=35\ \text{minuti}.$$

Il punto H dista $\sqrt{2}\simeq 1,41$ miglia nautiche da F (poiché FH è l'ipotenusa del triangolo rettangolo isoscele OFH di cateti lunghi 1 M).

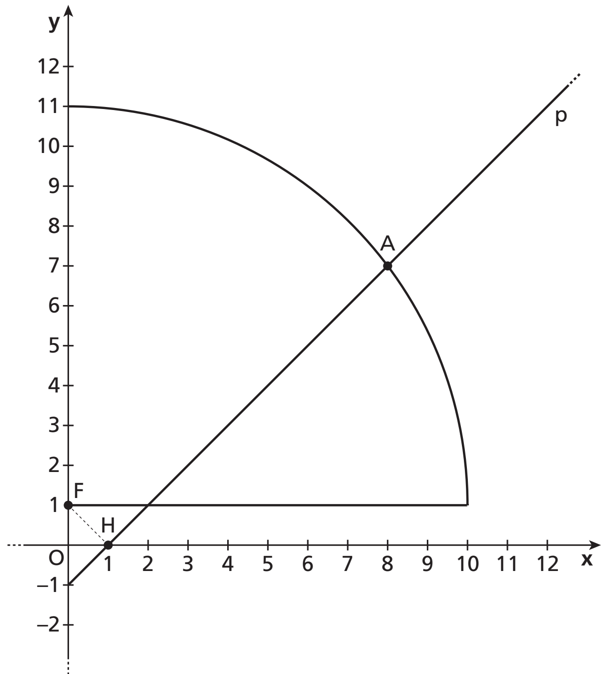

Figura 3

2. Le coordinate della nave P, espresse in miglia nautiche M in funzione del tempo t in minuti, sono date da:

$$P: \begin{cases} x = 14 + \dfrac{12-14}{10}t \\ y = 13 + \dfrac{11-13}{10}t \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 14 - \dfrac{1}{5}t \\ y = 13 - \dfrac{1}{5}t \end{cases}.$$

In modo analogo, le coordinate della nave Q sono date da:

$$Q: \begin{cases} x = 12 + \dfrac{11-12}{10}t \\ y = -2 + \dfrac{-1+2}{10}t \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 12 - \dfrac{1}{10}t \\ y = -2 + \dfrac{1}{10}t \end{cases}.$$

Stabiliamo quando le navi P e Q distano 9 miglia nautiche:

$$\overline{PQ} = 9 \rightarrow \overline{PQ}^2 = 81 \rightarrow (x_P - x_Q)^2 + (y_P - y_Q)^2 = 81 \rightarrow$$

$$\left(14 - \frac{1}{5}t - 12 + \frac{1}{10}t\right)^2 + \left(13 - \frac{1}{5}t + 2 - \frac{1}{10}t\right)^2 = 81 \rightarrow$$

$$\left(2 - \frac{1}{10}t\right)^2 + \left(15 - \frac{3}{10}t\right)^2 = 81 \rightarrow 4 + \frac{1}{100}t^2 - \frac{4}{10}t + 225 + \frac{9}{100}t^2 - \frac{90}{10}t = 81 \rightarrow$$

$$\frac{10}{100}t^2 - \frac{94}{10}t + 148 = 0 \rightarrow 10t^2 - 940t + 14\,800 = 0 \rightarrow$$

$$t^2 - 94t + 1480 = 0 \rightarrow$$

$$t = 47 \pm \sqrt{2209 - 1480} \rightarrow t = 47 \pm 27 \rightarrow t = 20 \text{ minuti} \vee t = 74 \text{ minuti}.$$

Quindi, le navi P e Q si trovano per la prima volta alla distanza di 9 miglia dopo 20 minuti dall'inizio del controllo marittimo.

La posizione della nave P in questo istante è:

$$P: \begin{cases} x = 14 - \frac{1}{5} \cdot 20 \\ y = 13 - \frac{1}{5} \cdot 20 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 14 - 4 \\ y = 13 - 4 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 10 \\ y = 9 \end{cases} \rightarrow C(10; 9).$$

Nello stesso istante, la nave Q è nella posizione $C'(10; 0)$.w

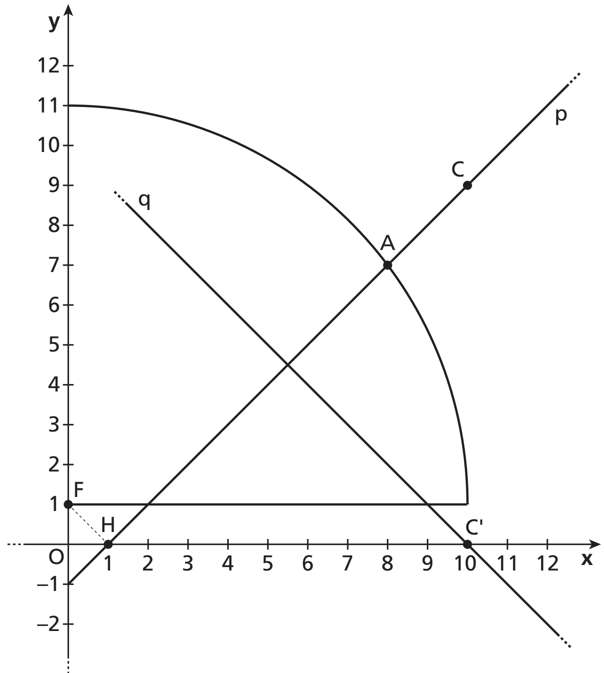

Figura 4

3. La distanza, istante per istante, fra i punti $P\left(14 - \frac{1}{5}t; 13 - \frac{1}{5}t\right)$ e $Q\left(12 - \frac{1}{10}t; -2 + \frac{1}{10}t\right)$ è:

$$d_{PQ}(t) = \sqrt{(x_P - x_Q)^2 + (y_P - y_Q)^2} = \sqrt{\left(14 - \frac{1}{5}t - 12 + \frac{1}{10}t\right)^2 + \left(13 - \frac{1}{5}t + 2 - \frac{1}{10}t\right)^2} =$$

$$\sqrt{\left(2 - \frac{1}{10}t\right)^2 + \left(15 - \frac{3}{10}t\right)^2}.$$

Tale distanza è minima quando il radicando assume il valore minimo. Cerchiamo quindi il minimo di:

$$f(t) = [d_{PQ}(t)]^2 = \left(2 - \frac{1}{10}t\right)^2 + \left(15 - \frac{3}{10}t\right)^2 = 4 + \frac{1}{100}t^2 - \frac{2}{5}t + 225 + \frac{9}{100}t^2 - 9t =$$

$$\frac{1}{10}t^2 - \frac{47}{5}t + 229.$$

Il grafico di $f(t)$ rappresenta una parabola con la concavità rivolta verso l'alto, il cui punto di minimo è rappresentato dal vertice, la cui ascissa è:

$$t_V = -\frac{b}{2a} = -\frac{-\frac{47}{5}}{2 \cdot \frac{1}{10}} = \frac{47}{5} \cdot \frac{10}{2} = 47.$$

Quindi, le due navi si trovano alla minima distanza dopo 47 minuti dall'inizio del controllo marittimo e si trovano alla distanza:

$$d_{PQ}(47) = \sqrt{\left(2 - \frac{1}{10}\cdot 47\right)^2 + \left(15 - \frac{3}{10}\cdot 47\right)^2} =$$

$$\sqrt{\left(-\frac{27}{10}\right)^2 + \left(\frac{9}{10}\right)^2} = \sqrt{\frac{729}{100} + \frac{81}{100}} =$$

$$\sqrt{\frac{810}{100}} = \frac{9}{\sqrt{10}} \simeq 2{,}846 \text{ M}.$$

4. Calcoliamo l'area della zona marittima pericolosa ZMP mediante l'integrale:

$$A_{\text{ZMP}} = \int_0^{x_B} [f(x) - g(x)]dx.$$

Dobbiamo prima determinare l'ascissa x_B del punto di intersezione fra i grafici di $f(x)$ e $g(x)$:

$$\begin{cases} y = -x^3 + x + 4 \\ y = x + 1 \end{cases} \rightarrow -x^3 + x + 4 = x + 1 \rightarrow x^3 = 3 \rightarrow x_B = \sqrt[3]{3} \simeq 1{,}44.$$

L'area di ZMP è quindi uguale a:

$$A_{\text{ZMP}} = \int_0^{\sqrt[3]{3}} (-x^3 + x + 4 - x - 1)dx = \int_0^{\sqrt[3]{3}} (-x^3 + 3)dx = \left[-\frac{x^4}{4} + 3x\right]_0^{\sqrt[3]{3}} =$$

$$-\frac{(\sqrt[3]{3})^4}{4} + 3\cdot\sqrt[3]{3} = -\frac{3}{4}\sqrt[3]{3} + 3\sqrt[3]{3} = \frac{9}{4}\sqrt[3]{3} \simeq 3{,}245 \text{ M}^2.$$

PROBLEMA 2

1. Il grafico della funzione:

$$f(x) = \ln\left(\frac{a - x}{x^2 + 4}\right) + bx$$

passa per l'origine del sistema di riferimento se:

$$f(0) = 0 \rightarrow \ln\frac{a}{4} = 0 \rightarrow \frac{a}{4} = 1 \rightarrow a = 4.$$

La funzione corrispondente:

$$f(x) = \ln\left(\frac{4 - x}{x^2 + 4}\right) + bx$$

ha dominio:

$$\frac{4 - x}{x^2 + 4} > 0 \rightarrow 4 - x > 0 \rightarrow x < 4$$

ed è derivabile nel suo dominio, quindi ha un massimo nel punto di ascissa $x = 2$ se la derivata prima si annulla in tale punto, è positiva prima e negativa dopo.
Calcoliamo la derivata prima e imponiamo che si annulli in $x = 2$:

$$f'(x) = \frac{x^2 + 4}{4 - x}\cdot\frac{-(x^2 + 4) - (4 - x)\cdot 2x}{(x^2 + 4)^2} + b \rightarrow f'(x) = \frac{x^2 - 8x - 4}{(x^2 + 4)(4 - x)} + b;$$

$$f'(2) = 0 \rightarrow \frac{4 - 16 - 4}{(4 + 4)(4 - 2)} + b = 0 \rightarrow \frac{-16}{8\cdot 2} + b = 0 \rightarrow b = 1.$$

Studiamo il segno della derivata prima della funzione $f(x) = \ln\left(\frac{4 - x}{x^2 + 4}\right) + x$:

$$f'(x) = \frac{x^2 - 8x - 4}{(x^2+4)(4-x)} + 1 \rightarrow f'(x) = \frac{x^2 - 8x - 4 + 4x^2 - x^3 + 16 - 4x}{(x^2+4)(4-x)} \rightarrow$$

$$f'(x) = \frac{-x^3 + 5x^2 - 12x + 12}{(x^2+4)(4-x)}.$$

Scomponiamo il numeratore con la regola di Ruffini, ricordando che il polinomio si annulla per $x = 2$.

	-1	$+5$	-12	$+12$
2		-2	$+6$	-12
	-1	$+3$	-6	0

La derivata prima si può allora scrivere nella seguente forma:

$$f'(x) = \frac{(2-x)(x^2 - 3x + 6)}{(x^2+4)(4-x)}.$$

Il trinomio $x^2 - 3x + 6$ e il binomio $x^2 + 4$ sono sempre positivi in $\mathbb{R}$; il binomio $4 - x$ è positivo nel dominio $x < 4$ della funzione. Il segno di $f'(x)$ è quindi determinato dal binomio $2 - x$ e risulta:

- $f'(x) > 0$ e $f(x)$ crescente per $2 - x > 0 \rightarrow x < 2$;
- $f'(x) < 0$ e $f(x)$ decrescente per $2 - x < 0 \rightarrow 2 < x < 4$.

Il punto di ascissa $x = 2$ risulta effettivamente un punto di massimo (assoluto) e l'espressione analitica della funzione cercata è dunque:

$$f(x) = \ln\left(\frac{4-x}{x^2+4}\right) + x.$$

2. Il dominio della funzione è $]-\infty; 4[$.

Calcoliamo i limiti agli estremi del dominio per determinare gli eventuali asintoti.

- $\lim_{x \to 4^-} f(x) = \lim_{x \to 4^-} \left[\ln\left(\frac{4-x}{x^2+4}\right) + x\right] = -\infty,$

  la funzione ammette l'asintoto verticale $x = 4$.

- $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \left[\ln\left(\frac{4-x}{x^2+4}\right) + x\right] = -\infty,$

  valutiamo se la funzione presenta un asintoto obliquo per $x \rightarrow -\infty$ (anche se il fatto che la funzione presenta un termine lineare e un termine logaritmico fa escludere l'esistenza di tale asintoto).

  $$m = \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x}\left[\ln\left(\frac{4-x}{x^2+4}\right) + x\right] = \lim_{x \to -\infty} \left[\frac{1}{x}\ln\left(\frac{4-x}{x^2+4}\right) + 1\right] = 1,$$

  perché nella forma indeterminata $0 \cdot \infty$ data dal termine $\frac{1}{x}\ln\left(\frac{4-x}{x^2+4}\right)$ prevale l'infinitesimo $\frac{1}{x}$ rispetto all'infinito $\ln\left(\frac{4-x}{x^2+4}\right)$.

  $$q = \lim_{x \to -\infty} [f(x) - mx] = \lim_{x \to -\infty} \left[\ln\left(\frac{4-x}{x^2+4}\right) + x - x\right] = \lim_{x \to -\infty} \left[\ln\left(\frac{4-x}{x^2+4}\right)\right] = -\infty,$$

  quindi l'asintoto obliquo non esiste (come avevamo ipotizzato).

3. Disegniamo un grafico approssimativo della funzione, per individuare la regione di cui dobbiamo calcolare l'area.

Riassumiamo le caratteristiche note di $f(x)$:

- è definita per $x < 4$,
- è crescente per $x < 2$ e decrescente per $2 < x < 4$; il punto di massimo in $x = 2$ ha ordinata

$$f(2) = \ln\frac{4-2}{4+4} + 2 = \ln\frac{1}{4} + 2 \simeq 0{,}614;$$

- passa per l'origine del sistema di riferimento;
- presenta un asintoto verticale di equazione $x = 4$, mentre tende a $-\infty$ per $x \to -\infty$, senza asintoto obliquo.

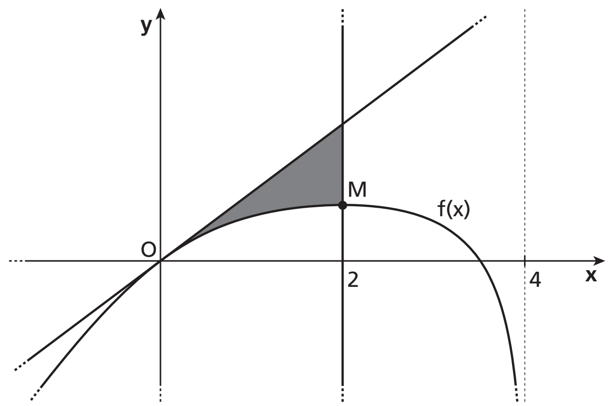

Figura 5

La retta tangente al grafico nell'origine ha coefficiente angolare:

$$m = f'(0) = \frac{(2-0)(0^2 - 3\cdot 0 + 6)}{(0^2+4)(4-0)} = \frac{12}{16} = \frac{3}{4},$$

ed equazione:

$$y = \frac{3}{4}x.$$

In figura abbiamo evidenziato l'area della regione delimitata dalla retta tangente alla curva nell'origine, dal grafico di $f(x)$ e dalla retta passante per il suo punto di massimo e parallela all'asse y. Calcoliamo la sua area mediante l'integrale:

$$A = \int_0^2 \left[\frac{3}{4}x - \ln\frac{4-x}{x^2+4} - x\right]dx = \int_0^2 \left[-\frac{1}{4}x - \ln\frac{4-x}{x^2+4}\right]dx.$$

Calcoliamo, per parti, l'integrale indefinito del termine logaritmico, trascurando la costante additiva finale:

$$\int \ln\frac{4-x}{x^2+4}dx = \int[\ln(4-x) - \ln(x^2+4)]dx = \int\ln(4-x)dx - \int\ln(x^2+4)dx =$$

$$x\ln(4-x) + \int\frac{x}{4-x}dx - x\ln(x^2+4) + 2\int\frac{x^2}{x^2+4}dx =$$

$$x\ln(4-x) - \int\frac{x-4+4}{x-4}dx - x\ln(x^2+4) + 2\int\frac{x^2+4-4}{x^2+4}dx =$$

$$x\ln(4-x) - \int\left(1 + \frac{4}{x-4}\right)dx - x\ln(x^2+4) + 2\int\left(1 - \frac{4}{x^2+4}\right)dx =$$

$$x\ln(4-x) - x - 4\ln|x-4| - x\ln(x^2+4) + 2x - 8\int\left(\frac{1}{x^2+4}\right)dx =$$

$$x\ln(4-x)-x-4\ln|x-4|-x\ln(x^2+4)+2x-4\int\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\left(\frac{x}{2}\right)^2+1}dx=$$

$$x\ln(4-x)+x-4\ln|x-4|-x\ln(x^2+4)-4\arctan\frac{x}{2}.$$

Possiamo procedere col calcolo dell'area:

$$A=\int_0^2\left[-\frac{1}{4}x-\ln\frac{4-x}{x^2+4}\right]dx=$$

$$\left[-\frac{x^2}{8}-x\ln(4-x)-x+4\ln|x-4|+x\ln(x^2+4)+4\arctan\frac{x}{2}\right]_0^2=$$

$$\left[-\frac{4}{8}-2\ln(4-2)-2+4\ln|2-4|+2\ln(4+4)+4\arctan\frac{2}{2}\right]-\left[4\ln|0-4|+4\arctan\frac{0}{2}\right]=$$

$$\left[-\frac{1}{2}-2\ln2-2+4\ln2+2\ln2^3+4\arctan1\right]-\left[4\ln2^2+4\arctan0\right]=$$

$$-\frac{5}{2}+(-2+4+6-8)\ln2+4\cdot\frac{\pi}{4}=\pi-\frac{5}{2}\simeq0{,}642.$$

4. Rappresentiamo la regione da ruotare attorno all'asse x, delimitata dalla tangente in O, dalla bisettrice del primo quadrante e dalla retta passante per il punto di massimo di $f(x)$ e parallela all'asse y.

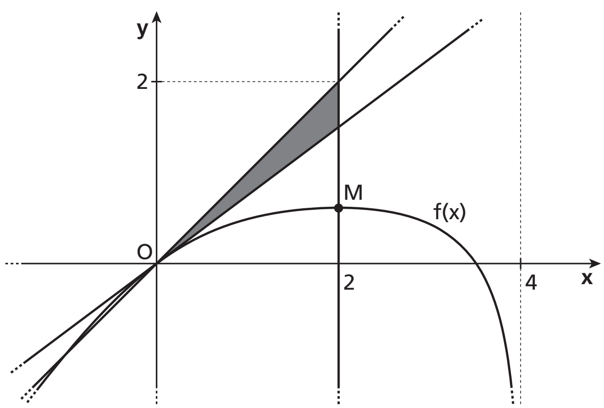

Figura 6

Il solido ottenuto ruotando attorno all'asse x tale regione è equivalente a un cono retto di altezza 2 e raggio di base 2, da cui è stato scavato un cono circolare retto di altezza 2 e raggio di base $\frac{3}{4}\cdot2=\frac{3}{2}$.

Il volume del solido è quindi dato da:

$$V=\frac{1}{3}\cdot2\cdot\pi\cdot2^2-\frac{1}{3}\cdot2\cdot\pi\left(\frac{3}{2}\right)^2=\left(\frac{8}{3}-\frac{3}{2}\right)\pi=\frac{16-9}{6}\pi=\frac{7}{6}\pi\simeq3{,}665.$$

QUESTIONARIO

1 In generale, il valor medio di una funzione, integrabile, su un intervallo $[a; b]$ è dato dall'integrale:

$$m = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx.$$

L'espressione analitica della funzione rappresentata nel grafico è:

$$f(x) = \begin{cases} x+4 & \text{se} -4 \leq x < -3 \\ -x-2 & \text{se} -3 \leq x < 0 \\ 2x-2 & \text{se } 0 \leq x < 1 \\ x-1 & \text{se } 1 \leq x < 3 \\ -x+5 & \text{se } 3 \leq x \leq 4 \end{cases}.$$

Il valor medio sull'intervallo $[-4; 4]$ di tale funzione è:

$$m = \frac{1}{8}\left[\int_{-4}^{-3}(x+4)dx + \int_{-3}^{0}(-x-2)dx + \int_{0}^{1}(2x-2)dx + \int_{1}^{3}(x-1)dx + \int_{3}^{4}(5-x)dx\right] =$$

$$\frac{1}{8}\left\{\left[\frac{x^2}{2}+4x\right]_{-4}^{-3} + \left[-\frac{x^2}{2}-2x\right]_{-3}^{0} + [x^2-2x]_0^1 + \left[\frac{x^2}{2}-x\right]_1^3 + \left[5x-\frac{x^2}{2}\right]_3^4\right\} =$$

$$\frac{1}{8}\left(\frac{9}{2}-12-\frac{16}{2}+16+\frac{9}{2}-6+1-2+\frac{9}{2}-3-\frac{1}{2}+1+20-\frac{16}{2}-15+\frac{9}{2}\right) = \frac{3}{16}.$$

In alternativa, se ricordiamo il significato geometrico dell'integrale (area della regione sottesa al grafico della funzione, col segno meno se il grafico della funzione si trova al di sotto dell'asse x), potevamo calcolare il valor medio della funzione nel seguente modo:

$$m = \frac{1}{8}\left[\int_{-4}^{-2}f(x)dx + \int_{-2}^{1}f(x)dx + \int_{1}^{3}f(x)dx + \int_{3}^{4}f(x)dx\right] =$$

$$\frac{1}{8}\left[\frac{2\cdot 1}{2} - \frac{3\cdot 2}{2} + \frac{2\cdot 2}{2} + \frac{(2+1)\cdot 1}{2}\right] = \frac{1}{8}\left(1-3+2+\frac{3}{2}\right) = \frac{3}{16}.$$

2 La probabilità che una persona del gruppo usi il prodotto A è $p = 0{,}32$. La probabilità contraria, che la persona non usi il prodotto A, è $q = 1 - 0{,}32 = 0{,}68$.
La variabile casuale X = «numero di persone che usa il prodotto A» è una variabile casuale discreta con distribuzione binomiale di parametri $n = 12$ e $p = 0{,}32$.
In generale, il valor medio di una variabile casuale discreta binomiale di parametri n e p è $\mu = np$; nel nostro caso:

$$\mu = 12 \cdot 0{,}32 = 3{,}84.$$

La varianza è invece data da $\sigma^2 = npq$, che nel nostro caso restituisce il valore:

$$\sigma^2 = 12 \cdot 0{,}32 \cdot 0{,}68 = 2{,}6112.$$

La deviazione standard risulta:

$$\sigma = \sqrt{2{,}6112} \simeq 1{,}616.$$

La probabilità che m persone scelte a caso dal gruppo di 12 persone usino il prodotto A è espressa da:

$$p(X = m) = \binom{12}{m}p^m q^{12-m},$$

con m naturale compreso fra 0 e 12.

La probabilità che, all'interno del gruppo, il numero di persone che usano il prodotto A sia compreso tra 2 e 5, estremi inclusi, è quindi data da:

$$p(2 \leq X \leq 5) = p(X=2) + p(X=3) + p(X=4) + p(X=5) =$$

$$\binom{12}{2} 0,32^2 \cdot 0,68^{10} + \binom{12}{3} 0,32^3 \cdot 0,68^9 + \binom{12}{4} 0,32^4 \cdot 0,68^8 + \binom{12}{5} 0,32^5 \cdot 0,68^7 \simeq$$

$$0,1429 + 0,2241 + 0,2373 + 0,1787 = 0,783 = 78,3\%.$$

3 La circonferenza γ è ottenuta dall'intersezione della circonferenza di equazione $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, che ha centro in $O(0; 0; 0)$ e raggio 2, con il piano di equazione $z = 1$, che è parallelo al piano Oxy. Il centro di γ si trova pertanto alla quota $z = 1$ e appartiene alla retta passante per O e perpendicolare al piano Oxy; tale retta è l'asse z. Quindi, il centro di γ ha coordinate $C(0; 0; 1)$.
Rappresentiamo nel disegno una sezione della sfera con il piano Oyz; il segmento AB è la proiezione della circonferenza γ sul piano Oyz.

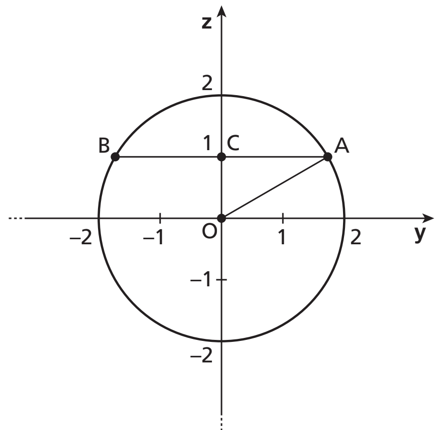

Figura 7

Il raggio CA della circonferenza γ è lungo:

$$\overline{CA} = \sqrt{\overline{OA}^2 - \overline{OC}^2} = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3}\,.$$

Consideriamo ora la sorgente luminosa posta nel punto $S(0; 0; z)$, con $z > 2$. Se la circonferenza γ rappresenta il confine tra la zona della sfera che risulta illuminata e quella che resta in ombra, allora sulla sezione col piano Oyz le rette SA e SB risultano tangenti alla circonferenza di centro O e passante per A e B, ovvero risultano perpendicolari ai raggi OA e OB.

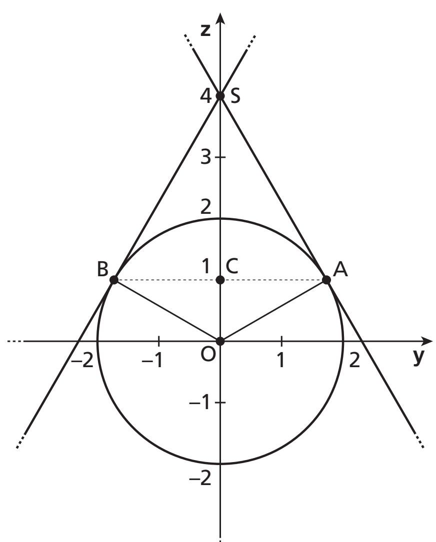

Figura 8

I triangoli rettangoli OAS e ACS sono simili, quindi hanno i lati corrispondenti in proporzione:

$$\frac{\overline{OS}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{OA}}{\overline{OC}} \rightarrow \overline{OS} = \frac{\overline{OA}}{\overline{OC}} \cdot \overline{OA} = \frac{2}{1} \cdot 2 = 4.$$

La sorgente S deve quindi avere coordinate $S(0; 0; 4)$, quindi S deve distare 4 dal centro della sfera.

4 Consideriamo il polinomio $P(x) = x^2 + bx + c$.

L'uguaglianza $P(P(1)) = P(P(2)) = 0$ asserisce che $P(1)$ e $P(2)$ sono radici del polinomio $P(x)$, con:

$$P(1) = 1 + b + c;\ P(2) = 4 + 2b + c.$$

D'altronde, le radici di $P(x)$ sono date da:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4c}}{2}$$

e la differenza delle radici è:

$$\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4c}}{2} - \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4c}}{2} = \sqrt{b^2 - 4c}\,.$$

Deve quindi risultare:

$$|P(2) - P(1)| = \sqrt{b^2 - 4c} \rightarrow |4 + 2b + c - 1 - b - c| = \sqrt{b^2 - 4c} \rightarrow |3 + b| = \sqrt{b^2 - 4c} \rightarrow$$
$$(3 + b)^2 = b^2 - 4c \rightarrow 9 + b^2 + 6b = b^2 - 4c \rightarrow 9 + 6b + 4c = 0.$$

La somma delle radici è invece uguale a $-b$, quindi:

$$P(2) + P(1) = -b \rightarrow 4 + 2b + c + 1 + b + c = -b \rightarrow 5 + 4b + 2c = 0.$$

Mettiamo a sistema le due condizioni trovate:

$$\begin{cases} 9 + 6b + 4c = 0 \\ 5 + 4b + 2c = 0 \end{cases} \xrightarrow{(\mathrm{I}) - 2(\mathrm{II})} \begin{cases} -1 - 2b = 0 \\ 5 + 4b + 2c = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} b = -\dfrac{1}{2} \\ c = -2b - \dfrac{5}{2} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} b = -\dfrac{1}{2} \\ c = -\dfrac{3}{2} \end{cases}.$$

Sostituiamo i coefficienti nel polinomio $P(x) = x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$ e determiniamo:

$$P(0) = c = -\frac{3}{2}.$$

5 La funzione $\ln(x)$ è continua per $x > 0$, quindi $\int_0^1 \ln(x)dx$ è un integrale improprio perché $\ln(x)$ non è continua nell'estremo inferiore di integrazione. Risolviamo l'integrale indefinito:

$$\int \ln x\,dx = x\ln x - \int x\frac{1}{x}dx = x\ln x - \int dx = x\ln x - x + c.$$

Calcoliamo ora l'integrale improprio assegnato:

$$\int_0^1 \ln x\,dx = \lim_{h \to 0^+} \int_h^1 \ln x\,dx = \lim_{h \to 0^+} [x\ln x - x]_h^1 = \lim_{h \to 0^+} [(1 \cdot \ln 1 - 1) - (h \cdot \ln h - h)] =$$
$$\lim_{h \to 0^+} (-1 - h \cdot \ln h + h).$$

Nella forma indeterminata $0 \cdot \infty$ dovuta al termine $h\ln h$, prevale l'infinitesimo h rispetto all'infinito $\ln h$, quindi:

$$\lim_{h \to 0^+} (-1 - h \cdot \ln h + h) = -1 - 0 + 0 = -1.$$

L'integrale improprio vale -1.

6 L'equazione differenziale:

$$\frac{dy}{dt} = ky$$

che descrive la numerosità della colonia di batteri è a variabili separabili. Risolviamola, osservando che è $y > 0$ perché y indica il numero di batteri della colonia:

$$\int \frac{dy}{y} = \int k dt \ \rightarrow \ \ln y = kt + c \ \rightarrow \ y = e^{kt+c} \ \rightarrow \ y = h \cdot e^{kt}.$$

Imponiamo le condizioni note:

$$\begin{cases} y(0) = 4000 \\ y(3) = 6500 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} h \cdot e^{k \cdot 0} = 4000 \\ h \cdot e^{k \cdot 3} = 6500 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} h = 4000 \\ 4000 \cdot e^{3k} = 6500 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} h = 4000 \\ e^{3k} = \dfrac{6500}{4000} \end{cases} \rightarrow$$

$$\begin{cases} h = 4000 \\ 3k = \ln \dfrac{13}{8} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} h = 4000 \\ k = \dfrac{1}{3} \ln \dfrac{13}{8} \end{cases}.$$

La popolazione di batteri è dunque descritta dalla legge:

$$y(t) = 4000 \cdot e^{\left(\frac{1}{3}\ln\frac{13}{8}\right)t} \ \rightarrow \ y(t) = 4000 \cdot \left(e^{\ln\left(\frac{13}{8}\right)^{\frac{1}{3}}}\right)^t \ \rightarrow$$

$$y(t) = 4000 \cdot \left(\frac{13}{8}\right)^{\frac{t}{3}} \ \rightarrow \ y(t) = 4000 \cdot \left(\sqrt[3]{\frac{13}{8}}\right)^t.$$

Al tempo $t = 10$ la popolazione è costituita da circa:

$$y(10) = 4000 \cdot \left(\sqrt[3]{\frac{13}{8}}\right)^{10} \simeq 20180 \text{ batteri,}$$

e quindi la popolazione supera la soglia indicata dei 20 000 batteri.

7 Le leggi orarie sono

$$\begin{cases} x(t) = 3 - 2\cos t \\ y(t) = 2 + 3\sin t \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \cos t = \dfrac{3 - x(t)}{2} \\ \sin t = \dfrac{y(t) - 2}{3} \end{cases}.$$

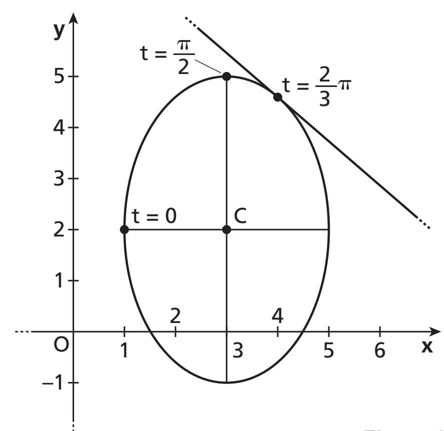

Figura 9

Da $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$ otteniamo $\left(\frac{y-2}{3}\right)^2 + \left(\frac{3-x}{2}\right)^2 = 1$.

Quindi le leggi orarie descrivono una ellisse di centro $C(3; 2)$, semiasse minore (lungo l'asse x) $a = 2$ e semiasse maggiore (lungo l'asse y) $b = 3$.

L'equazione cartesiana di tale ellisse è:

$$\frac{(x-3)^2}{4} + \frac{(y-2)^2}{9} = 1.$$

All'istante $t = 0$ la particella si trova in $(3 - 2 \cdot 1; 2 + 3 \cdot 0) = (1; 2)$, all'istante $t = \frac{\pi}{2}$ la particella si trova in $(3 - 2 \cdot 0; 2 + 3 \cdot 1) = (3; 5)$, quindi il punto si muove in senso orario lungo l'ellisse.

All'istante $t = \frac{2}{3}\pi$ la particella è nella posizione:

$$\left(3 - 2 \cdot \cos\frac{2}{3}\pi; 2 + 3 \cdot \sin\frac{2}{3}\pi\right) = \left(3 - 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right); 2 + 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \left(4; 2 + \frac{3}{2}\sqrt{3}\right).$$

In un intorno di tale punto possiamo descrivere la traiettoria della particella mediante una funzione $f(x)$. La derivata $\frac{dy}{dx}$ fornisce il coefficiente angolare $m = \tan\theta$ della retta tangente alla traiettoria, con θ angolo formato dalla retta tangente con l'asse x, pertanto:

$$\tan\theta = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{y'}{x'},$$

dove x' e y' rappresentano le derivate rispetto al tempo delle leggi orarie.

Sviluppiamo i calcoli:

$$\tan\theta = \frac{y'}{x'} = \frac{3\cos t}{2\sin t} = \frac{3}{2\tan t} \;\rightarrow\; \theta(t) = \arctan\frac{3}{2\tan t}.$$

Siamo ora in grado di calcolare la velocità di variazione di θ; deriviamo rispetto al tempo la sua espressione analitica:

$$\theta'(t) = \frac{1}{1+\left(\frac{3}{2\tan t}\right)^2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{-(1+\tan^2 t)}{\tan^2 t} \;\rightarrow$$

$$\theta'(t) = -\frac{3}{2} \cdot \frac{4\tan^2 t}{4\tan^2 t + 9} \cdot \frac{1+\tan^2 t}{\tan^2 t} \;\rightarrow$$

$$\theta'(t) = -6 \cdot \frac{1+\tan^2 t}{4\tan^2 t + 9}.$$

Per $t = \frac{2}{3}\pi$, la velocità di variazione di θ è pari a:

$$\theta'\left(\frac{2}{3}\pi\right) = -6 \cdot \frac{1+\tan^2\frac{2}{3}\pi}{4\tan^2\frac{2}{3}\pi + 9} = -6 \cdot \frac{1+(-\sqrt{3})^2}{4(-\sqrt{3})^2+9} = -6 \cdot \frac{1+3}{4\cdot 3+9} = -2 \cdot \frac{4}{7} = -\frac{8}{7} \simeq -1,14 \text{ rad/s}.$$

8 Per i teoremi sulle funzioni integrali, se

$$f(x) = \int_a^{h(x)} g(t)\,dt,$$

allora

$$f'(x) = g(h(x)) \cdot h'(x).$$

Nel caso proposto è:

$$g(t) = \frac{1}{1+\ln t},\; h(x) = x^3, \text{ quindi:}$$

$$f'(x) = \frac{1}{1+\ln x^3} \cdot 3x^2 \;\rightarrow\; f'(2) = \frac{1}{1+\ln 2^3} \cdot 3 \cdot 2^2 = \frac{12}{1+\ln 8} \simeq 3,897.$$

9 Indichiamo con x e con $8-x$ i due numeri in cui dividiamo il numero 8.
Supponiamo che x sia maggiore o uguale a $8-x$, quindi $4 \leq x \leq 8$.
Il problema di Tartaglia richiede di massimizzare il prodotto:

$$p(x) = x \cdot (8-x) \cdot (x-8+x) \;\rightarrow\; p(x) = x \cdot (8-x) \cdot (2x-8).$$

Cerchiamo i punti estremanti di tale funzione. Calcoliamo innanzi tutto la derivata prima:

$$p'(x) = (8-x)(2x-8) - x(2x-8) + 2x(8-x) \;\rightarrow$$

$$p'(x) = 16x - 64 - 2x^2 + 8x - 2x^2 + 8x + 16x - 2x^2 \;\rightarrow$$

$$p'(x) = -6x^2 + 48x - 64 \;\rightarrow\; p'(x) = -2(3x^2 - 24x + 32).$$

La derivata prima si annulla per:

$$x = \frac{12 \pm \sqrt{144-96}}{3} = \frac{12 \pm \sqrt{48}}{3} = 4 \pm \frac{4}{3}\sqrt{3} \;\rightarrow\; x_1 = 4 - \frac{4}{3}\sqrt{3} \simeq 1{,}7 \vee x_2 = 4 + \frac{4}{3}\sqrt{3} \simeq 6{,}3.$$

Solo la soluzione $x_2 = 4 + \frac{4}{3}\sqrt{3}$ è accettabile, per la posizione $4 \leq x \leq 8$ fatta sulla x.

Osserviamo inoltre che:

- $p'(x) > 0$ e $p(x)$ è crescente per $4 \leq x < x_2$,
- $p'(x) < 0$ e $p(x)$ è decrescente per $x_2 < x \leq 8$,

quindi $x_2 = 4 + \frac{4}{3}\sqrt{3}$ rende massimo il prodotto indicato.

Il numero 8 è diviso nei due numeri $4 + \frac{4}{3}\sqrt{3}$ e $8 - \left(4 + \frac{4}{3}\sqrt{3}\right) = 4 - \frac{4}{3}\sqrt{3}$.

10 La retta n perpendicolare (detta anche *normale*) al grafico Γ di una funzione $f(x)$ in un suo punto di coordinate $A(a; f(a))$ è la retta passante per A e ortogonale alla retta t tangente a Γ in A.
Per la condizione di perpendicolarità fra rette, il coefficiente angolare di n è l'antireciproco del coefficiente angolare di t:

$$m_n = -\frac{1}{m_t} \;\rightarrow\; m_n = -\frac{1}{f'(a)}.$$

La retta n ha dunque equazione:

$$y = -\frac{1}{f'(a)}(x-a) + f(a).$$

Rappresentiamo nel disegno la situazione per una funzione qualunque.

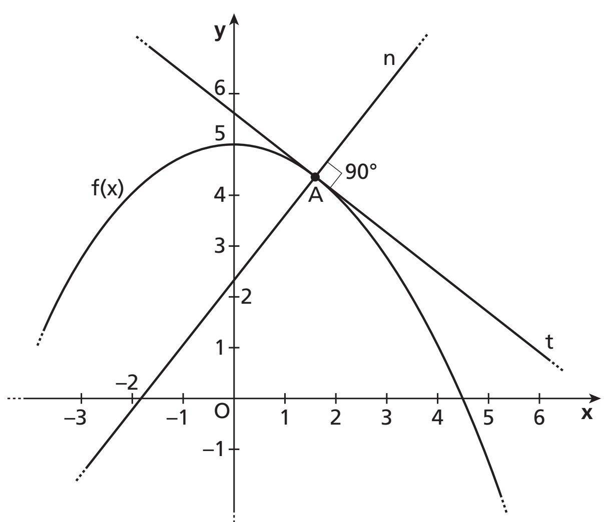

Figura 10

Nel caso specifico è:

$$f(x) = 4x^3 - 7x^2,\; f'(x) = 12x^2 - 14x,$$

$$a = 3,\; f(a) = f(3) = 4 \cdot 3^3 - 7 \cdot 3^2 = 45,$$

$$f'(a) = f'(3) = 12 \cdot 3^2 - 14 \cdot 3 = 66,$$

quindi la retta normale al grafico di $f(x)$ nel punto di ascissa 3 ha equazione:

$$y = -\frac{1}{66}(x-3) + 45.$$