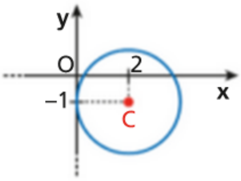
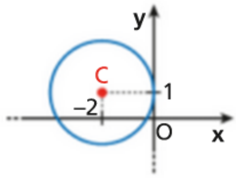
Esercitazioni sulla circonferenza 3d linguistico 2019

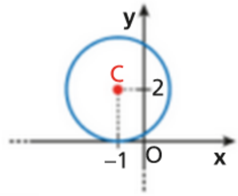
42 Qual è il grafico della circonferenza di equazione $x^2 + y^2 + 4x - 2y + 1 = 0$?



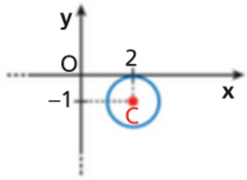
A



B

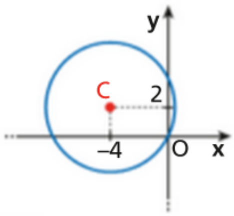


C

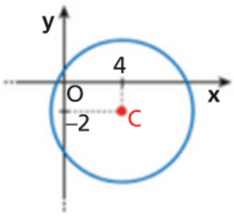


D

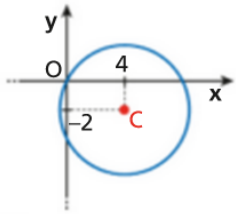
43 Qual è il grafico della circonferenza di equazione $x^2 + y^2 - 8x + 4y = 0$?



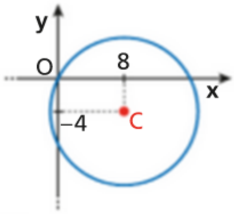
A



B



C

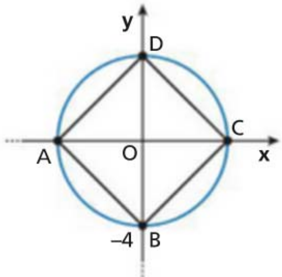


D

46

REALTÀ E MODELLI **In palestra** Rispetto al sistema di riferimento nella figura sotto, l'equazione della circonferenza che approssima il manubrio è $x^2 + y^2 - 16y = 0$. A che altezza si trova da terra la mano della ragazza sul centro del manubrio?
[8 cm]

47



a. Qual è l'equazione della circonferenza?

A $x^2 + y^2 = 4$ C $x^2 + y^2 = -16$

B $x^2 + y^2 = 16$ D $x^2 + y^2 = -4$

b. Determina le coordinate dei punti A, C e D:

$A(\square; \square)$,

$C(\square; \square)$,

$D(\square; \square)$.

c. Calcola l'area del quadrilatero $ABCD$.

Appartenenza di un punto a una circonferenza

Stabilisci se le seguenti circonferenze passano per i punti indicati a fianco.

52 $x^2 + y^2 - 4x + y = 0$, $A(1; 2)$.

53 $x^2 + y^2 + 3x - y - 1 = 0$, $A(0; -1)$.

54 $x^2 + y^2 + 2x + 2y - 7 = 0$, $P(2; -1)$.

55 $x^2 + y^2 - 6x = 0$, $B(3; 3)$.

56 $x^2 + y^2 + x - 4y + 1 = 0$, $A(1; 1)$.

57 $x^2 + y^2 - 7x + y - 1 = 0$, $P(-1; 0)$.

62 Calcola centro e raggio della circonferenza di equazione $x^2 + y^2 - 7x + 4y - 4 = 0$. Verifica poi se la circonferenza passa per l'origine degli assi. $\left[C\left(\frac{7}{2}; -2\right); r = \frac{9}{2}; \text{no}\right]$

63 **VERO O FALSO?** La circonferenza di equazione $x^2 + y^2 - 2x - 3 = 0$:

a. ha il centro sull'asse x. V F

b. passa per il punto $A(1; -2)$. V F

c. ha raggio 4. V F

d. non passa per l'origine. V F

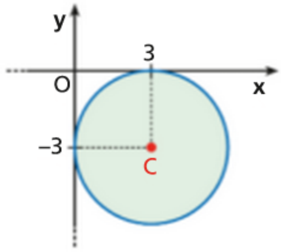
64 Verifica che i punti $A(3; 1)$ e $B(1; -5)$ non appartengono alla circonferenza $x^2 + y^2 - 4x = 0$. Sono interni o esterni alla circonferenza? (**SUGGERIMENTO** Se un punto è interno, la sua distanza dal centro è minore del...) [A interno; B esterno]

65 Stabilisci se i punti $A(5; -3)$, $B(1; -2)$ e $C(-1; 1)$ sono interni, esterni o appartengono alla circonferenza di equazione $x^2 + y^2 - 4x + 6y + 4 = 0$. Quindi rappresenta la circonferenza nel piano cartesiano e verifica graficamente la posizione dei punti.

Con i parametri

66 **TEST** La circonferenza della figura ha equazione

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0.$$



Allora:

A $a = 6, b = -6.$

B $a = -6, b = 6, c = 3.$

C $a = b.$

D $c = 9.$

73 **ESERCIZIO GUIDA** Tracciamo il grafico di $y = -\sqrt{9 - x^2}$.

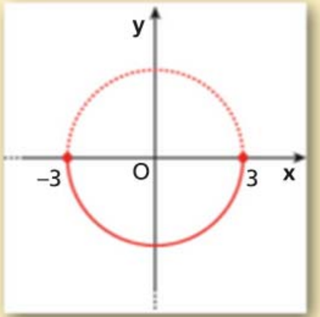
Determiniamo il dominio:

$$9 - x^2 \geq 0 \quad \rightarrow \quad -3 \leq x \leq 3.$$

Poiché $\sqrt{9 - x^2} \geq 0$ per ogni x del dominio, nell'equazione deve essere $y \leq 0$ per avere concordanza di segno.
Eleviamo al quadrato:

$$y^2 = 9 - x^2, \qquad \text{con } y \leq 0.$$

Otteniamo $x^2 + y^2 = 9$, che è l'equazione di una circonferenza con centro $O(0; 0)$ e raggio 3.
La disegniamo e consideriamo solo i punti del piano che hanno ordinata negativa o nulla. Il grafico ottenuto rappresenta una funzione.



Rappresenta graficamente le seguenti funzioni. CONTROLLA POI CON GEOGEBRA

74 $y = \sqrt{1 - x^2}$

75 $y = -\sqrt{16 - x^2}$

78 $y = -\sqrt{-x^2 - 8x}$

79 $y = \sqrt{4x - x^2 + 5}$

82 $y = \sqrt{25 - x^2}$

83 $y = -\sqrt{6x - x^2}$

107 **COMPLETA** le seguenti affermazioni in riferimento alla circonferenza di equazione $x^2 + y^2 - 2x - 3 = 0$, quindi rappresentala graficamente.

a. Ha raggio $r =$ ☐.

b. Ha centro $C($☐; ☐$)$.

c. Interseca l'asse y in $A($☐; ☐$)$ e $B($☐; ☐$)$.

d. Passa per il punto $P($☐$; -2)$.

e. Interseca l'asse x in $D($☐; ☐$)$ e $E($☐; ☐$)$.

f. Interseca la retta $y = 2$ in $Q($☐; ☐$)$.

Posizione di una retta rispetto a una circonferenza

▶ Teoria a p. 300

96 **ESERCIZIO GUIDATO** Determina la posizione della retta di equazione $3x + y + 1 = 0$ rispetto alla circonferenza di equazione $x^2 + y^2 + 6x + 4y + 9 = 0$.

La circonferenza ha centro $C(\square;\square)$ e raggio

$$r = \sqrt{\square} = \sqrt{4} = 2.$$

Troviamo la distanza tra C e la retta:

$$d = \frac{|3x_C + y_C + 1|}{\sqrt{\square^2 + \square^2}} = \frac{|3(-3) + (-2) + 1|}{\sqrt{10}} = \frac{10}{\sqrt{10}} = \sqrt{10}.$$

Poiché $d > r$, la retta è esterna alla circonferenza.

Se...	la retta è...
$d > r$	esterna
$d = r$	tangente
$d < r$	secante

Determina la posizione della retta rispetto alla circonferenza senza ricercare i punti di intersezione.

97 $x^2 + y^2 - 4x + 2y + 4 = 0,$ $\quad 3x - 4y - 6 = 0.$ [secante]

98 $x^2 + y^2 - x + 2y = 0,$ $\quad x - 2y = 0.$ [tangente]

99 $x^2 + y^2 - 3x + 4y = 0,$ $\quad y = -5.$ [esterna]

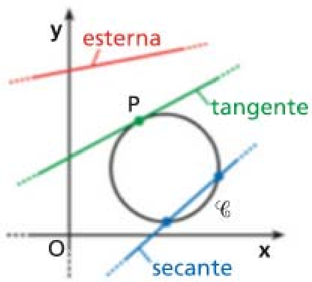
$$\begin{cases} x^2 + y^2 + ax + by + c = 0 \\ a'x + b'y + c' = 0 \end{cases}$$

equazione della circonferenza
equazione della retta

↓

equazione risolvente del sistema

- $\Delta > 0$ → retta secante
- $\Delta = 0$ → retta tangente
- $\Delta < 0$ → retta esterna



108 **ESERCIZIO GUIDA** Stabiliamo la posizione della retta di equazione $2x - y + 1 = 0$ rispetto alla circonferenza di equazione $x^2 + y^2 - x - 9y + 8 = 0$ e determiniamo le coordinate degli eventuali punti di intersezione.

Consideriamo il sistema formato dalle equazioni della retta e della circonferenza:

$$\begin{cases} 2x - y + 1 = 0 \\ x^2 + y^2 - x - 9y + 8 = 0 \end{cases}.$$

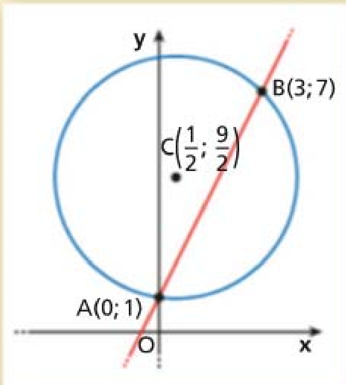
Risolviamo con il metodo di sostituzione:

$$\begin{cases} y = 2x + 1 \\ x^2 + (2x+1)^2 - x - 9(2x+1) + 8 = 0 \end{cases} \rightarrow$$

$$\begin{cases} y = 2x + 1 \\ x^2 + 4x^2 + 4x + 1 - x - 18x - 9 + 8 = 0 \end{cases} \rightarrow$$

$$\begin{cases} y = 2x + 1 \\ 5x^2 - 15x = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = 2x + 1 \\ 5x(x-3) = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 0;\ y = 1; \\ x = 3;\ y = 7. \end{cases}$$

La retta è quindi secante e $A(0; 1)$ e $B(3; 7)$ sono i punti di intersezione richiesti.



Nelle seguenti coppie di equazioni, stabilisci la posizione della retta rispetto alla circonferenza e, nei casi in cui la retta non sia esterna, determina le coordinate dei punti di intersezione o quelle del punto di tangenza.

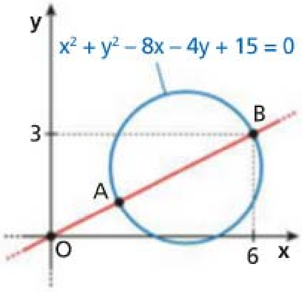
109 $x^2+y^2-4x-2y=0, \quad x-4=0.$ [secante: $(4; 0)$, $(4; 2)$]

110 $x^2+y^2-8x+10y+25=0, \quad y+9=0.$ [tangente: $(4; -9)$]

111 $x^2+y^2-6x-2y+8=0, \quad y-3=0.$ [esterna]

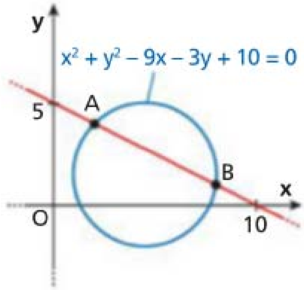
LEGGI IL GRAFICO

117 Trova le coordinate del punto A.



[$A(2; 1)$]

118 Trova le coordinate dei punti A e B.



[$A(2; 4)$, $B(8; 1)$]

119 La retta di equazione $x+y+4=0$ interseca la circonferenza di equazione $x^2+y^2+6x-4y+4=0$ nei punti A e B. Calcola la misura della corda AB. [$3\sqrt{2}$]

120 Determina i punti di intersezione A e B della retta di equazione $y=2x-4$ con la circonferenza di equazione $x^2+y^2+4x-4y-17=0$ e calcola la misura della corda AB. [$A(1; -2)$, $B(3; 2)$; $2\sqrt{5}$]

Rette tangenti a una circonferenza

Teoria a p. 301

Rette tangenti condotte da un punto esterno

133 **TEST** Se P è un punto esterno a una circonferenza data, le tangenti condotte da P alla circonferenza sono:

A sempre due. B una o due. C una, due o nessuna. D almeno due.

134 **ESERCIZIO GUIDA** Determiniamo le equazioni delle rette passanti per $A(0; 7)$ e tangenti alla circonferenza di equazione $x^2+y^2-10x-6y+18=0$.

- **Primo metodo: $\Delta = 0$**

Mettiamo a sistema l'equazione di una generica retta passante per A con l'equazione della circonferenza.

$$\begin{cases} y = mx+7 \\ x^2+y^2-10x-6y+18=0 \end{cases}$$

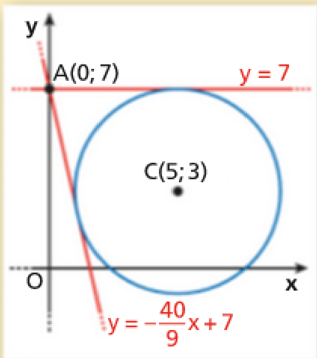
Troviamo l'equazione risolvente e poniamo $\Delta = 0$:

$$x^2(1+m^2)+2x(4m-5)+25=0.$$

$$\frac{\Delta}{4}=0 \quad \to \quad (4m-5)^2-25(1+m^2)=0 \quad \to$$

$$-9m^2-40m=0 \quad \to$$

$$-m(9m+40)=0 \quad \to \quad m_1=0, \quad m_2=-\frac{40}{9}.$$



Le equazioni delle due rette tangenti sono: $y=7$, $y=-\frac{40}{9}x+7$.

- **Secondo metodo: distanza retta-centro uguale al raggio**

La circonferenza ha centro $C(5; 3)$ e raggio $r = \sqrt{25 + 9 - 18} = \sqrt{16} = 4$.
Le rette che passano per A hanno equazione $mx - y + 7 = 0$ oppure $x = 0$.
Applichiamo la formula della distanza fra la generica retta passante per A e il centro C:

$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|m \cdot 5 - 1 \cdot 3 + 7|}{\sqrt{m^2 + 1}} = \frac{|5m + 4|}{\sqrt{m^2 + 1}}.$$

Poniamo $d = r$ e ricaviamo m:

$$\frac{|5m + 4|}{\sqrt{m^2 + 1}} = 4 \rightarrow (5m + 4)^2 = 16(m^2 + 1) \rightarrow 25m^2 + 40m + \cancel{16} = 16m^2 + \cancel{16} \rightarrow$$

$$9m^2 + 40m = 0 \rightarrow \begin{cases} m_1 = 0, \\ m_2 = -\dfrac{40}{9}. \end{cases}$$

Le equazioni delle due rette tangenti sono quindi $y = 7$, $y = -\frac{40}{9}x + 7$.

135 Scrivi le equazioni delle rette tangenti alla circonferenza di equazione $x^2 + y^2 = 8$ passanti per il punto $P(0; 4)$. $[y = -x + 4;\ y = x + 4]$

136 Trova le equazioni delle rette tangenti alla circonferenza di equazione $x^2 + y^2 - 2x - 10y + 13 = 0$ condotte dall'origine. $[2x - 3y = 0;\ 3x + 2y = 0]$

137 Determina le equazioni delle rette tangenti alla circonferenza di equazione $x^2 + y^2 - 6x - 4y + 9 = 0$ condotte dal punto $P(9; 0)$. $[y = 0;\ 3x + 4y - 27 = 0]$

138 Trova le equazioni delle rette passanti per $A(-2; 3)$ e tangenti alla circonferenza di equazione $x^2 + y^2 - 10x + 8y - 8 = 0$. $[x = -2;\ y = 3]$

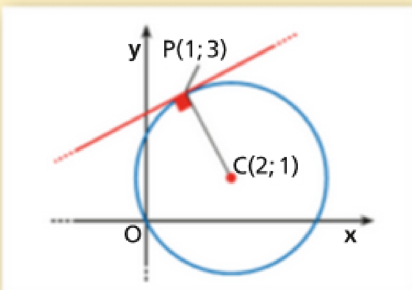
147 **ESERCIZIO GUIDA** Determina l'equazione della retta tangente alla circonferenza $x^2 + y^2 - 4x - 2y = 0$ nel suo punto $P(1; 3)$.

metodo: retta tangente in P come perpendicolare al raggio PC

La retta tangente è perpendicolare al raggio PC nel punto di tangenza. La circonferenza ha centro $C(2; 1)$.

Il coefficiente angolare del raggio PC è:

$$m = \frac{y_P - y_C}{x_P - x_C} = \frac{3 - 1}{1 - 2} = -2.$$



Per la condizione di perpendicolarità $m' = -\frac{1}{m}$, la retta tangente ha coefficiente angolare $\frac{1}{2}$. Scriviamo l'equazione della tangente in P:

$$y - 3 = \frac{1}{2}(x - 1) \rightarrow y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2}.$$

Assegnate l'equazione di una circonferenza e le coordinate di un punto P, verifica che P appartiene alla circonferenza e determina l'equazione della tangente in P.

148 $x^2 + y^2 + 5x = 0, \quad P(-1; -2).$ $[3x - 4y - 5 = 0]$

149 $x^2 + y^2 + 2x - 4y = 0, \quad P(-2; 4).$ $[x - 2y + 10 = 0]$

150 $x^2 + y^2 + 4y - 6 = 0, \quad P(-1; 1).$ $[3y - x - 4 = 0]$

151 $x^2 + y^2 - 10x + 8y - 8 = 0, \quad P(-2; -4).$ $[x = -2]$

3 Determinare l'equazione di una circonferenza

▶ Teoria a p. 305

Sono noti il centro e un punto

Determina l'equazione della circonferenza di centro C e passante per il punto P.

159 $C(3; -2), \quad P(4; 0).$ $[x^2 + y^2 - 6x + 4y + 8 = 0]$

160 $C\left(-\frac{3}{2}; \frac{1}{2}\right), \quad P(6; -1).$ $[x^2 + y^2 + 3x - y - 56 = 0]$

È noto un diametro

172 TEST La circonferenza con diametro di estremi $A(0; 2)$ e $B(6; -2)$ ha centro:

- A $C(3; 0)$.
- B $C(0; 3)$.
- C $C(3; 1)$.
- D $C(-3; 2)$.

173 ESERCIZIO GUIDATO Determina l'equazione della circonferenza di diametro AB, con $A(1; 0)$ e $B(7; 2)$.

Il centro della circonferenza è il punto medio del segmento AB:

$$x_C = \frac{\square + \square}{2} = 4, \quad y_C = \frac{\square + \square}{2} = 1 \quad \rightarrow \quad C(4; 1).$$

Calcoliamo la lunghezza del raggio:

$$r = \overline{AC} = \sqrt{(\square)^2 + (\square)^2} = \sqrt{10}.$$

La circonferenza ha equazione:

$$(x - \square)^2 + (y - \square)^2 = \square \quad \rightarrow \quad x^2 + y^2 - 8x - 2y + 7 = 0.$$

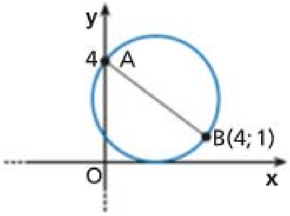
Determina l'equazione della circonferenza avente per diametro il segmento di estremi A e B.

174 $A(4; 4), \quad B(-4; -4).$ $[x^2 + y^2 = 32]$

175 $A(1; 0), \quad B(7; 2).$ $[x^2 + y^2 - 8x - 2y + 7 = 0]$

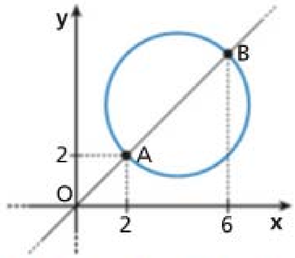
LEGGI IL GRAFICO Scrivi le equazioni delle circonferenze di diametro AB rappresentate nelle figure.

179



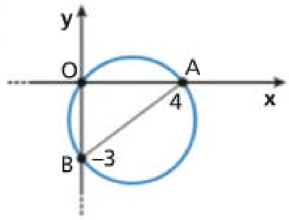
$[x^2+y^2-4x-5y+4=0]$

180



$[x^2+y^2-8x-8y+24=0]$

181



$[x^2+y^2-4x+3y=0]$

Sono noti tre punti

185 **RIFLETTI SULLA TEORIA** È possibile trovare l'equazione della circonferenza passante per i punti $A(3;\ 1)$ $B(-1;\ 1)$ e $C(-2;\ 1)$? Perché?

186 **TEST** La circonferenza passante per i punti $O(0;\ 0)$, $A(0;\ 2)$, $B(2;\ 0)$:

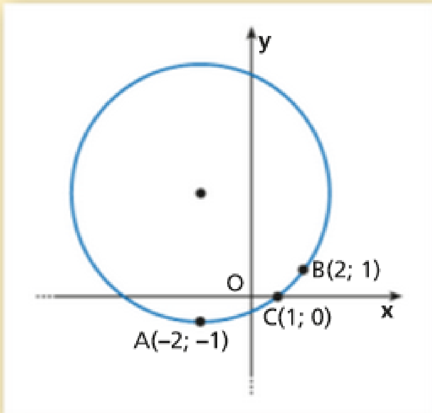
A ha raggio 2. **B** ha diametro AB. **C** passa anche per $C(0;\ -2)$. **D** non esiste.

187 **ESERCIZIO GUIDATO** Determina l'equazione della circonferenza passante per i punti $A(-2;-1)$, $B(2;1)$ e $C(1;0)$.

Se una curva passa per un punto, le coordinate del punto verificano l'equazione della curva, quindi imponiamo che le coordinate dei tre punti dati verifichino l'equazione generica della circonferenza

$$x^2+y^2+ax+by+c=0.$$

$$\begin{cases} 4+1-2a-b+c=0 & \text{passaggio per } A(-2;\ -1) \\ \square+\square+\square a+b+c=0 & \text{passaggio per } B(2;\ 1) \\ \square+a+c=0 & \text{passaggio per } C(1;\ 0) \end{cases}$$



Riduciamo il sistema in forma normale.

$$\begin{cases} -2a-b+c=-5 \\ 2a+b+c=-5 \\ a+c=-1 \end{cases}$$

Applichiamo il metodo di riduzione alle prime due equazioni sommandole membro a membro.

$$\begin{cases} 2c=\square \\ \square a+b+c=\square \\ a+c=\square \end{cases} \rightarrow \begin{cases} c=-5 \\ 2a+b=\square \\ a=\square \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a=\square \\ b=\square \\ c=\square \end{cases}$$

Sostituiamo i valori ottenuti per a, b e c nell'equazione generale della circonferenza.

$$x^2+y^2+4x-8y-5=0.$$

Determina, se esiste, l'equazione della circonferenza passante per i punti dati.

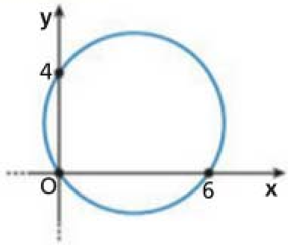
188 $A(0;4)$, $B(2;0)$, $C(3;1)$. $[x^2+y^2-2x-4y=0]$

189 $A(0;1)$, $B(3;2)$, $C(0;-1)$. $[x^2+y^2-4x-1=0]$

190 $D(-4;0)$, $E(-2;-1)$, $F(2;-3)$. [non esiste]

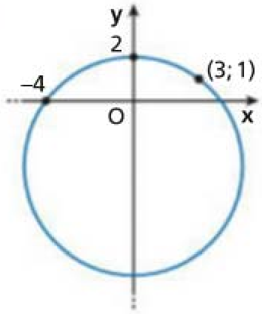
LEGGI IL GRAFICO Scrivi le equazioni delle circonferenze rappresentate nelle figure.

200



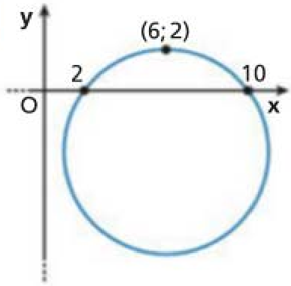
$[x^2 + y^2 - 6x - 4y = 0]$

201



$[x^2 + y^2 + 6y - 16 = 0]$

202



$[x^2 + y^2 - 12x + 6y + 20 = 0]$

Sono noti due punti e il centro appartiene a una retta

204 **ESERCIZIO GUIDA** Determiniamo l'equazione della circonferenza passante per i punti $A(-1; 2)$ e $B(2; 5)$ e avente il centro C sulla retta r di equazione $y = 2x - 2$.

Troviamo il centro della circonferenza come punto della retta r equidistante da A e da B:

$C(x; 2x-2)$;

$\overline{AC}^2 = \overline{BC}^2 \rightarrow (x+1)^2 + (2x-4)^2 = (x-2)^2 + (2x-7)^2$.

Svolgiamo i calcoli e risolviamo.

$\cancel{x^2} + 2x + 1 + \cancel{4x^2} - 16x + 16 = \cancel{x^2} - 4x + 4 + \cancel{4x^2} - 28x + 49$

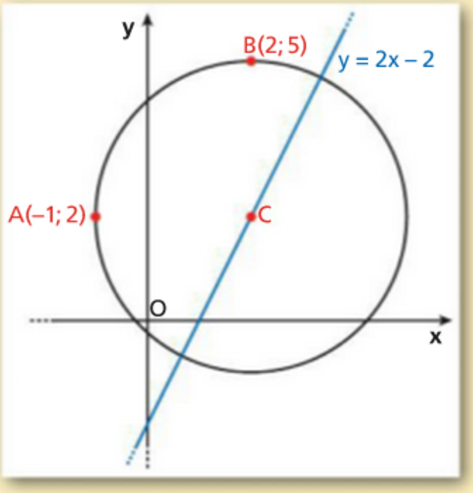
$18x = 36 \rightarrow x = 2$

Allora il centro è $C(2; 2)$ e il raggio della circonferenza è:

$\overline{AC} = \sqrt{3^2 + 0^2} = 3$.

La circonferenza ha equazione:

$(x-2)^2 + (y-2)^2 = 9 \rightarrow x^2 + y^2 - 4x - 4y - 1 = 0$.



205 Scrivi l'equazione della circonferenza passante per i punti $A(-2; 0)$, $B(3; 1)$ e avente il centro C sull'asse delle ordinate. $[x^2 + y^2 - 6y - 4 = 0]$

206 Trova l'equazione della circonferenza avente il centro sulla retta di equazione $y = 3$ e passante per i punti $A(8; 9)$ e $B(12; 1)$. $[x^2 + y^2 - 12x - 6y + 5 = 0]$

207 Determina l'equazione della circonferenza passante per i punti $A(1; 2)$ e $B(3; 4)$ e avente centro sulla retta di equazione $x - 3y - 1 = 0$. $[x^2 + y^2 - 8x - 2y + 7 = 0]$

È nota una retta tangente

212 **TEST** L'equazione della circonferenza tangente all'asse delle ordinate e di centro $C(-2; -3)$ è:

A $x^2 + y^2 + 4x + 6y - 9 = 0$.

B $x^2 + y^2 + 4x + 6y = 0$.

C $x^2 + y^2 + 4x + 6y + 9 = 0$.

D $x^2 + y^2 - 4x - 6y + 9 = 0$.

213 **ESERCIZIO GUIDA** Determiniamo l'equazione della circonferenza di centro $C(1; 1)$ e tangente alla retta di equazione $y = 2x + 4$.

Il raggio coincide con la distanza di C dalla retta tangente.

Scriviamo l'equazione della retta in forma implicita:

$$2x - y + 4 = 0.$$

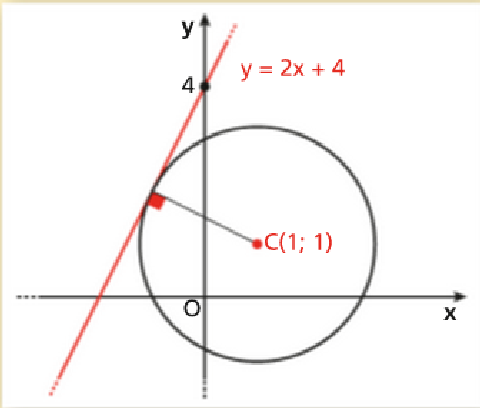
Calcoliamo la distanza di C dalla retta:

$$r = \frac{|2 \cdot 1 - 1 \cdot 1 + 4|}{\sqrt{4 + 1}} = \frac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}.$$

L'equazione della circonferenza è:

$$(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = (\sqrt{5})^2 \quad \rightarrow$$

$$x^2 + y^2 - 2x - 2y - 3 = 0.$$



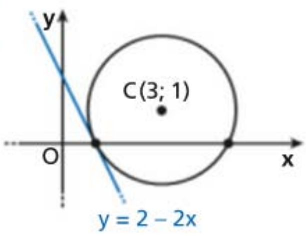
214 Scrivi l'equazione della circonferenza di centro $C(3; -1)$ e tangente all'asse delle ordinate. $[x^2 + y^2 - 6x + 2y + 1 = 0]$

215 Determina l'equazione della circonferenza con centro $C(-2; -5)$ e tangente all'asse delle ascisse. $[x^2 + y^2 + 4x + 10y + 4 = 0]$

216 Trova l'equazione della circonferenza con centro nell'origine e tangente alla retta $x + 2y - 5 = 0$. $[x^2 + y^2 = 5]$

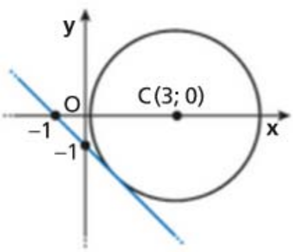
LEGGI IL GRAFICO Scrivi le equazioni delle circonferenze rappresentate nelle figure tenendo conto che la retta è tangente alla circonferenza.

220



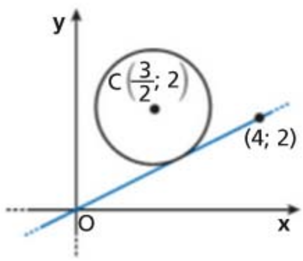
$[x^2 + y^2 - 6x - 2y + 5 = 0]$

221



$[x^2 + y^2 - 6x + 1 = 0]$

222



$[x^2 + y^2 - 3x - 4y + 5 = 0]$