Come risolvere un sistema lineare

Sia k il rango della matrice incompleta (e completa).

- 1. Si considerano soltanto k delle n equazioni del sistema, trascurando le altre eventuali $n - k$ equazioni; la scelta delle k equazioni non è però arbitraria ma deve essere fatta in modo che il rango dei coefficienti di queste equazioni sia proprio k .*
- 2. In tal modo si viene a considerare un sistema di sole k equazioni in n incognite.*
- 3. In quest'ultimo sistema si prendono k incognite in modo che il determinante dei loro coefficienti sia diverso da zero e alle altre eventuali $n - k$ incognite si attribuiscono valori arbitrari, (diventano cioè parametri).*
- 4. Si viene in tal modo ad ottenere un sistema di k equazioni in k incognite (ed $n - k$ eventuali parametri) il cui determinante dei coefficienti è diverso da zero, e perciò si può risolvere con la regola di Cramer. Gli n numeri così trovati costituiscono una soluzione del sistema lineare, di n equazioni in n incognite, dato.*

Da quanto detto segue che:

- $k < n$. Allora il sistema ammette **infinite** soluzioni e precisamente si dice che il sistema ammette ∞^{n-k} soluzioni;

- $k = n$. Allora il sistema ammette **una e una sola** soluzione; infatti per quanto detto precedentemente (e che sarà meglio spiegato in seguito) il sistema ammette $\infty^{n-k} = \infty^{n-n} = 1$ soluzione.

Resta inteso che se le due matrici, completa e incompleta, non hanno la stessa caratteristica, il sistema **non ha soluzioni**.

Esempi:a) Risolvere il sistema

$$\begin{cases} 3x + y - 2z = -2 \\ x - 2y + 5z = -1 \\ 2x + 3y - z = 11 \end{cases}$$

Poiché $D = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 5 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = -42 \neq 0$, il sistema può essere risolto con

la regola di Cramer e, risultando:

$$D_1 = \begin{vmatrix} -2 & 1 & -2 \\ -1 & -2 & 5 \\ 11 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 42, \quad D_2 = \begin{vmatrix} 3 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 5 \\ 2 & 11 & -1 \end{vmatrix} = -210,$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & 11 \end{vmatrix} = -84, \text{ la soluzione cercata è:}$$

$$x = \frac{D_1}{D} = \frac{42}{-42} = -1; \quad y = \frac{D_2}{D} = \frac{-210}{-42} = 5, \quad z = \frac{D_3}{D} = \frac{-84}{-42} = 2.$$

b) Risolvere il sistema

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x - 2y + 2z = -1 \\ 2x - y + 3z = 0. \end{cases}$$

Poiché $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 0$, il sistema non si può risolvere con la regola di

Cramer.

A tale sistema si applica il teorema di Rouché-Capelli, dopo aver osservato che il rango della matrice incompleta è 2, essendo $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$, e che anche quello della matrice completa è ancora 2, perché tutti i suoi minori

del terzo ordine:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & 0 \end{vmatrix},$$

sono tutti nulli, come si può verificare.

Il sistema, per il teorema di Rouché-Capelli, è perciò possibile e ammette $\infty^{n-k} = \infty^{3-2} = \infty^1$ soluzioni. Per trovarle basta risolvere, con la regola di

Cramer, il sistema $\begin{cases} x + y = 1 - z \\ x - 2y = -1 - 2z. \end{cases}$ (dove z è *parametro*).

Si avrà:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1-z & 1 \\ -1-2z & -2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}} = \frac{1-4z}{3}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1-z \\ 1 & -1-2z \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}} = \frac{2+z}{3}, \quad z = z,$$

dove z può assumere un valore arbitrario.