CALCOLO COMBINATORIO ÐR

- DISPOSIZIONI SEMPLICI (tutti quei raggruppamenti tali che due di essi differiscano o per l'ordine o per almeno un elemento)

Sia $A = \{a_1, a_2, a_3, ..., a_n\}$ un insieme formato da *n* elementi distinti.
Si definiscono disposizioni semplici degli *n* elementi presi *k* alla volta tutti i sottoinsiemi ordinati di *A*, ciascuno dei quali contiene *k* elementi ($k \le n$). Il numero complessivo di tali sottoinsiemi si indica con il simbolo:

$D_{n,k}$ "disposizioni semplici di *n* elementi di classe *k*", oppure *k* a *k*

e sono :

$$\boxed{D_{n,k} = \frac{n!}{(n-k)!} = n(n-1)(n-2)....(n-k+1)}$$

(es. Usando 3 di 7 bandierine di diverso colore, quanti messaggi diversi si possono formare?
sol.: $D_{7,3} = \frac{7!}{(7-3)!} = \frac{7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1} = 7\cdot 6\cdot 5 = 210$)

- PERMUTAZIONI SEMPLICI (tutti quei raggruppamenti tali che due di essi differiscano solamente per l'ordine)

Sono sostanzialmente disposizioni semplici di *n* elementi di classe *n* cioè $D_{n,n}$ e si indicano con il simbolo:

P_n "permutazioni di *n* elementi distinti" e sono :

$$\boxed{P_n = n!}$$

(es. Quante numeri diverse si possono formare utilizzando tutte le cifre 1,2,3 ?
sol.: 123,132,231,213,321,312 sono 6 infatti $P_3 = 3! = 3\cdot 2\cdot 1 = 6$)

- COMBINAZIONI SEMPLICI (tutti quei raggruppamenti tali che due di essi differiscano almeno per un elemento)

Il numero delle combinazioni di *n* elementi di classe *k* si indica con il simbolo $C_{n,k}$
Dato che da una combinazione di classe *k* si possono ottenere $k!$ disposizioni diverse risulta $D_{n,k} = k!\, C_{n,k}$
cioè:

$$\boxed{C_{n,k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}}$$

(es. Quante cinquine si possono formare con i 90 numeri del lotto ?
sol.: $C_{90,5} = \frac{90!}{5!(90-5)!} = \frac{90\cdot 89\cdot 88\cdot 87\cdot 86\cdot 85!}{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1\cdot 85!} = \frac{90\cdot 89\cdot 88\cdot 87\cdot 86}{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1} = 43.949.268$)

- *DISPOSIZIONI CON RIPETIZIONE* (disposizioni in cui si ammette che un elemento possa essere ripetuto anche per *k* volte nel medesimo raggruppamento)

Il numero delle disposizioni di *n* elementi di classe *k* si indica con il simbolo $D'_{n,k}$ (non sussiste più $k \leq n$) e sono :

$$\boxed{D'_{n,k} = n^k}$$

(es. Quante configurazioni diverse si possono avere lanciando contemporaneamente tre monete (Testa, Croce) ?
sol.: Sono disp. con rip. di 2 elementi, (T)esta e (C)roce, di classe 3. TTT, TTC, TCT, CTT, CCT, CTC, TCC, CCC cioè 8,
infatti : $D'_{2,3} = 2^3 = 8$)

- *PERMUTAZIONI CON RIPETIZIONE* (tutti quei raggruppamenti che si ottengono considerando le *n*! permutazioni semplici di *n* elementi distinti prefissati e imponendo che in ognuna di esse *m* dei detti elementi diventino uguali)

Il numero delle permutazioni con ripetizione di n elementi, m dei quali uguali tra loro, è uguale al quoziente fra il numero di permutazioni semplici degli n elementi e il fattoriale di m cioè :

$$\boxed{P'_{n(m)} = \frac{P_n}{m!} = \frac{n!}{m!}}$$

Se poi degli n elementi *m* sono di un certo tipo, *r* di un altro, *q* di un altro tipo ancora, ecc., si ha :

$$\boxed{P'_{n(m,r,q,....)} = \frac{P_n}{m!r!q!....} = \frac{n!}{m!r!q!....} \quad \text{con } m+r+q+... \leq n}$$

(es. Dati gli oggetti ☺,☺,☺,✂,✂,🡻 calcolare tutte le permutazioni possibili ?
sol.: Gli elementi da permutare sono complessivamente 6. Di essi 3 sono di un certo tipo e 2 di un altro tipo.
$P'_{6(3,2)} = \frac{6!}{3!2!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3!}{3! \cdot 2 \cdot 1} = 60$)

- *COMBINAZIONI CON RIPETIZIONE* *DI N OGGETTI DISTINTI DI CLASSE K*

(tutti quei raggruppamenti contenenti *k* di questi oggetti in modo che in essi ciascun oggetto possa trovarsi al massimo *k* volte e in modo che due raggruppamenti differiscano tra loro almeno per un oggetto, oppure quando, contenendo gli stessi oggetti, questi non compaiano due volte in ugual numero)

Il numero delle combinazioni con ripetizione di *n* elementi di classe *k* si dimostra essere uguale al numero delle combinazioni semplici di (*n+k-1)* elementi di classe *k* , vale cioè :

$$\boxed{C'_{n,k} = C_{n+k-1,k} = \frac{(n+k-1)!}{(n-1)!k!}}$$

(es. Trovare il numero dei termini di un polinomio omogeneo in due variabili e di terzo grado
sol.: Cerchiamo le combinazioni con rip. del numero delle variabili (2), di classe 3 (grado del polinomio):
$C'_{2,3} = C_{4,3} = \frac{4!}{3!1!} = 4$ ad es. $3x^3 - 4x^2y + 2xy^2 - y^3$)