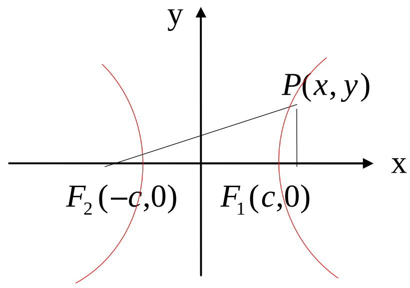
GEOMETRIA ANALITICA DEL PIANO ĐR

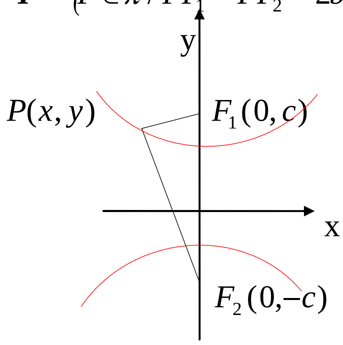
- *L'IPERBOLE* (luogo geometrico dei punti del piano per i quali è costante la differenza delle distanze da due punti F_1 e F_2 detti fuochi)

I = $\left\{ P \in \pi \,/\, \overline{PF_1} - \overline{PF_2} = 2a \text{ con } a \in R_0^+ \right\}$



caso 1 fuochi sull'asse x $\begin{cases} x \text{ asse trasverso} \\ y \text{ asse non trasverso} \end{cases}$

I = $\left\{ P \in \pi \,/\, \overline{PF_1} - \overline{PF_2} = 2b \text{ con } b \in R_0^+ \right\}$



caso 2 fuochi sull'asse y $\begin{cases} y \text{ asse trasverso} \\ x \text{ asse non trasverso} \end{cases}$

Equazione dell'iperbole

Da $\left| \overline{PF_1} - \overline{PF_2} \right| = 2a$ risulta

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \pm 2a$$

quadrando e semplificando risulta

$\boxed{\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1}$ avendo posto $\boxed{b^2 = c^2 - a^2}$

Da $\left| \overline{PF_1} - \overline{PF_2} \right| = 2b$ risulta

$$\sqrt{(y-c)^2 + x^2} - \sqrt{(y+c)^2 + x^2} = \pm 2b$$

quadrando e semplificando risulta

$\boxed{\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = -1}$ avendo posto $\boxed{a^2 = c^2 - b^2}$

(per le intersezioni con rette e le cond. di tg. vedere la parabola)

Proprietà di un'iperbole (caso 1 o 2)

1. **Simmetria rispetto agli assi coordinati**
2. **L'iperbole è una curva illimitata**
3. **Eccentricità**: posto

$$e = \frac{c}{a} \quad \text{(caso 1)} \quad \text{si ricava } e = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}} > 1$$

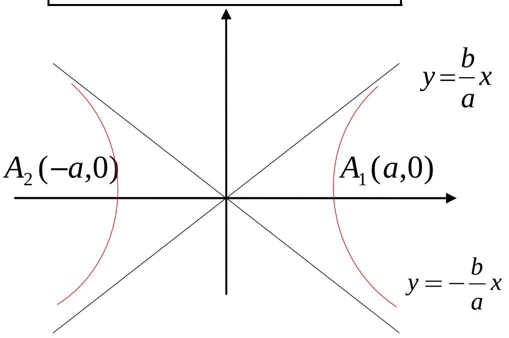
$$e = \frac{c}{b} \quad \text{(caso 2)} \quad \text{si ricava } e = \sqrt{1 + \frac{a^2}{b^2}} > 1$$

cioè $\boxed{e > 1}$

4. **Asintoti**

$$\boxed{y = \frac{b}{a}x \qquad y = -\frac{b}{a}x}$$

A_1, A_2 sono detti Vertici



- ***<u>L'Iperbole equilatera</u>***

se nell'equazione dell'iperbole risulta essere $\underline{a = b}$ l'iperbole si dice ***equilatera*** e le equazioni dei casi 1 e 2 diventano:

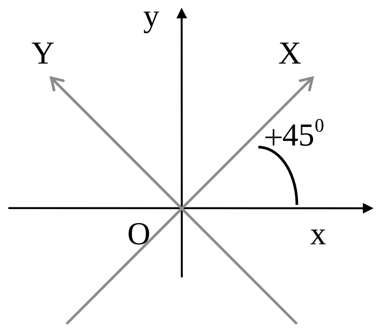
$$\boxed{(*)\ \ x^2 - y^2 = a^2 \qquad \text{e} \qquad x^2 - y^2 = -a^2}$$

(questo secondo caso lo si trova anche nella forma $y^2 - x^2 = a^2$)

(se l'asse trasverso è l'asse x) (se l'asse trasverso è l'asse y)

in questi due casi gli asintoti diventano $\boxed{y = x \ \text{ e } \ y = -x}$

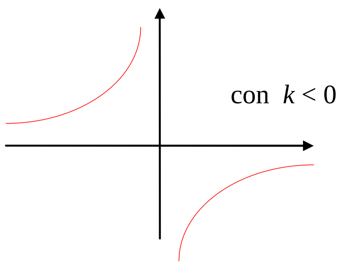
caso1 $c = a\sqrt{2}$
caso2 $c = b\sqrt{2}$ $\longrightarrow$ $e = \sqrt{2}$

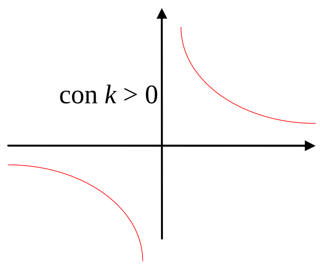


considerando poi la rotazione del piano di $\pm 45^0$

$$\begin{cases} x = \dfrac{\sqrt{2}}{2} X \pm \dfrac{\sqrt{2}}{2} Y \\ y = \dfrac{\sqrt{2}}{2} Y \pm \dfrac{\sqrt{2}}{2} X \end{cases}$$ e sostituita in (*)

si ottiene cioè $\boxed{XY = -\dfrac{a^2}{2}}$ (caso1) $\boxed{XY = \dfrac{a^2}{2}}$ (caso2) della forma $\boxed{XY = k}$





- ***<u>L'Iperbole equilatera traslata</u>*** *(funzione omografica)*

Un'equazione del tipo con $\boxed{y = \dfrac{ax + b}{cx + d}}$ $c \neq 0$ e $ad - bc \neq 0$ si dimostra essere

una iperbole equilatera traslata avente come ***<u>centro di simmetria</u>*** $O_1\left(-\dfrac{d}{c}; \dfrac{a}{c}\right)$

e per asintoti le rette di equazione $x = -\dfrac{d}{c}$ e $y = \dfrac{a}{c}$