Esame di Stato - Liceo Scientifico
Prova scritta di Matematica - 21 giugno 2018

<u>Problema 2</u>
Soluzione a cura di L. Rossi, S. De Stefani, L. Tomasi

PROBLEMA 2

Consideriamo la funzione $f_k : \Re \to \Re$ così definita:

$$f_k(x) = -x^3 + kx + 9$$

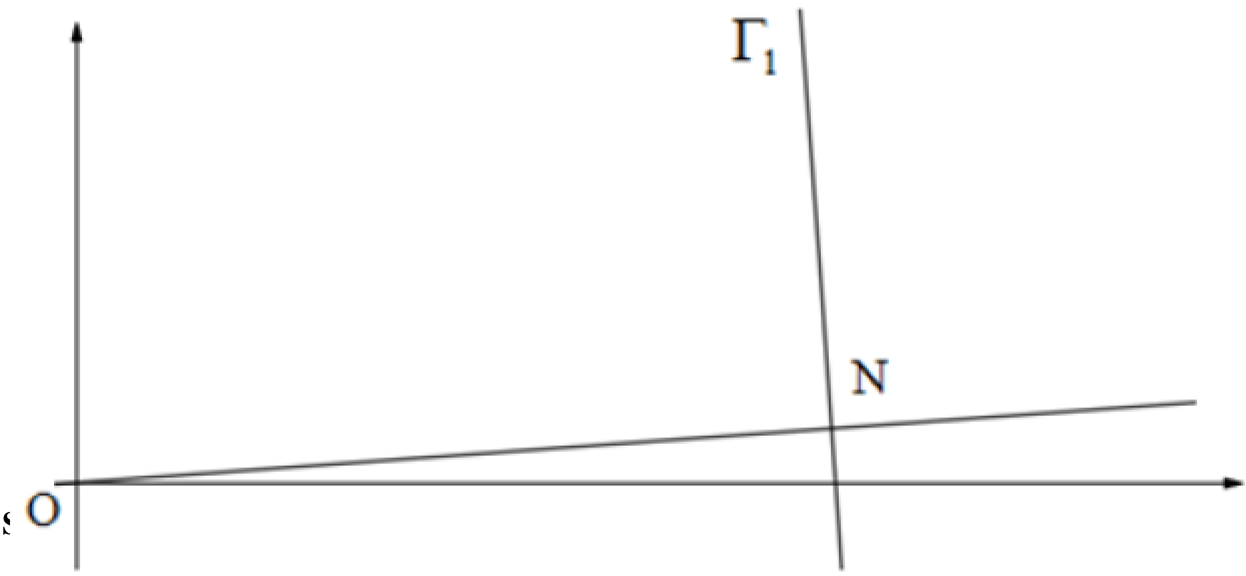
con $k \in Z$.

1. Detto Γ_k il grafico della funzione, verifica che per qualsiasi valore del parametro k la retta r_k, tangente a Γ_k nel punto di ascissa 0 e la retta s_k, tangente a Γ_k nel punto di ascissa 1, si incontrano in un punto M di ascissa $\frac{2}{3}$.

2. Dopo aver verificato che $k = 1$ è il massimo intero positivo per cui l'ordinata del punto M è minore di 10, studia l'andamento della funzione $f_1(x)$, determinandone i punti stazionari e di flesso e tracciandone il grafico.

3. Detto T il triangolo delimitato dalle rette r_1, s_1 e dall'asse delle ascisse, determina la probabilità che, preso a caso un punto $P(x_p, y_p)$ all'interno di T, questo si trovi al di sopra di Γ_1 (cioè che si abbia $y_p > f_1(x)$ per tale punto P).

4. Nella figura è evidenziato un punto $N \in \Gamma_1$ e un tratto del grafico Γ_1. La retta normale a Γ_1 in N (vale a dire la perpendicolare alla retta tangente a Γ_1 in quel punto) passa per l'origine degli assi O. Il grafico Γ_1 possiede tre punti con questa proprietà. Dimostra, più in generale, che il grafico di un qualsiasi polinomio di grado $n > 0$ non può possedere più di $2n-1$ punti nei quali la retta normale al grafico passa per l'origine.



Punto 1

$$f_k: \quad \mathcal{R} \to \mathcal{R}$$
$$x \to -x^3 + kx + 9, \qquad k \in Z$$

Funzione continua e derivabile in R, $f'_k(x) = -3x^2 + k$.

- r_k , retta tangente in $P(0;9)$ a Γ_k , ha coefficiente angolare $m_r = f'_k(0) = k$ ed equazione:

$$y - 9 = kx$$

- s_k , retta tangente in $Q(1; k+8)$ a Γ_k , ha coefficiente angolare $m_s = f'_k(1) = k - 3$ ed equazione:

$$y - k - 8 = (k-3)(x-1)$$

Le due rette si intersecano nel punto M di cui si vuole verificare l'ascissa.

$M = r_k \cap s_k$: $\begin{cases} y = kx + 9 \\ y = (k-3)x + 11 \end{cases}$, che, risolto, dà $x_M = \frac{2}{3}$.

Punto 2

Il punto M, appartenente a r_k, ha ordinata $y = \frac{2}{3}k + 9$. Si ha:

$\frac{2}{3}k + 9 < 10 \quad \Rightarrow \quad \frac{2}{3}k < 1 \quad \Rightarrow$

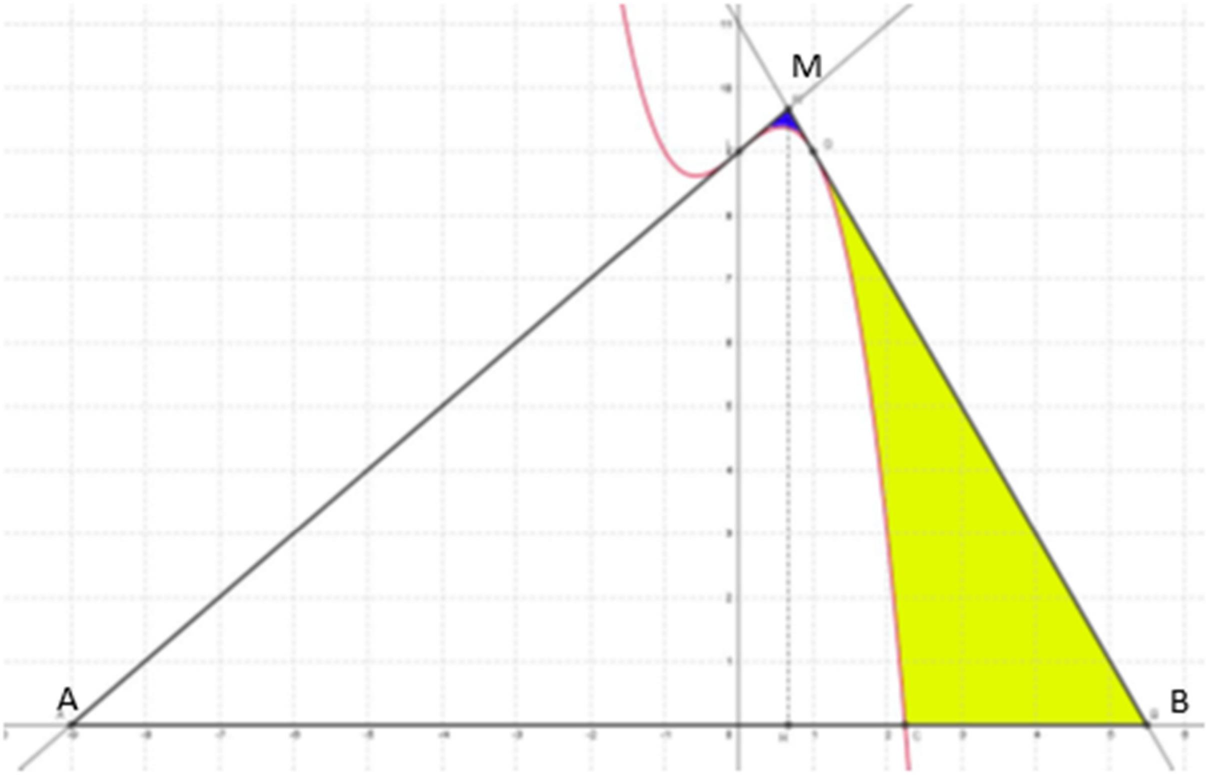
$k < \frac{3}{2} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{k = 1}$

$$y = f_1(x) = -x^3 + x + 9$$

$y' = -3x^2 + 1 \Rightarrow m\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}; 9 - \frac{2\sqrt{3}}{9}\right)$, $M\left(\frac{\sqrt{3}}{3}; 9 + \frac{2\sqrt{3}}{9}\right)$

$y'' = -6x \Rightarrow F(0;9)$

Punto 3



La probabilità richiesta si calcola facendo il rapporto tra la somma delle aree delle regioni blu e gialla del triangolo ABM e l'area del triangolo ABM.

L'area del triangolo AMB è $\frac{\overline{AB} \cdot \overline{MH}}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{11}{2} + 9\right)\frac{29}{3} = \frac{841}{12}$.

L'area della parte blu è:

$$\int_0^{\frac{2}{3}} [(x+9) - (-x^3 + x + 9)]\, dx + \int_{\frac{2}{3}}^{1} [(-2x + 11) - (-x^3 + x + 9)]\, dx = \frac{4}{81} + \frac{11}{324} = \frac{1}{12}$$

L'area della parte gialla è:

$$\int_1^{\alpha} [(-2x + 11) - (-x^3 + x + 9)]\, dx + \int_{\alpha}^{\frac{11}{2}} (-2x + 11)\, dx = \frac{\alpha^4}{4} - \frac{\alpha^2}{2} - 9\alpha + \frac{59}{2}$$

essendo α l'ascissa del punto C intersezione della curva con l'asse delle ascisse.

Calcolando un valore approssimato di α alla prima cifra decimale tramite il metodo di bisezione (applicabile poiché nell'intervallo [2,3] sussistono le ipotesi del Teorema di Bolzano) otteniamo $\alpha \sim 2.2$.

Quindi la probabilità richiesta è circa $\frac{\frac{1}{12} + \frac{2.2^4}{4} - \frac{2.2^2}{2} - 9(2.2) + \frac{59}{2}}{\frac{841}{12}} \sim 18{,}9\%$.

Punto 4

Sia $p(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots \ldots \ldots \ldots + a_{n-1}x + a_n$ una generica funzione polinomiale di grado n>0.

Scriviamo la generica equazione della normale al polinomio in un suo punto P di ascissa α.

$$y-p(\alpha)=-\frac{1}{p'(\alpha)}(x-\alpha) \quad \text{con} \quad p'(\alpha)\neq 0 \ .$$

$$y-(a_0\alpha^n+a_1\alpha^{n-1}+\cdots\ldots+a_{n-1}\alpha+a_n)=-\frac{1}{a_0n\alpha^{n-1}+a_1(n-1)\alpha^{n-2}+\cdots\ldots+a_{n-1}}(x-\alpha)$$

Imponiamo il passaggio per O e otteniamo:

$$-(a_0\alpha^n+a_1\alpha^{n-1}+\cdots\ldots+a_{n-1}\alpha+a_n)=-\frac{1}{a_0n\alpha^{n-1}+a_1(n-1)\alpha^{n-2}+\cdots\ldots+a_{n-1}}(-\alpha)$$

Svolgendo i calcoli otteniamo un'equazione polinomiale di grado $2n-1$ nella variabile α che ha al più $2n-1$ soluzioni.

Giudizio sul problema

Livello di difficoltà	☐ Basso	☐ Medio	☐ Alto	☒ Molto alto	
Si tratta di un problema contestualizzato	☒ No	☐ In modo forzato	☐ In modo accettabile	☐ Ben contestualizzato	
L'argomento è presente nelle Indicazioni Nazionali per i Licei Scientifici?	☐ Sì	☒ No	☐ Non è esplicitato / Non è chiaro		
Di solito, viene svolto?	☐ Sì	☐ No	☒ Non sempre		
È un argomento presente nei libri di testo?	☐ Mai	☐ Non sempre	☒ Sempre		
Formulazione	☐ Scorretta	☐ Ambigua	☐ Poco chiara	☒ Corretta	☐ Molto chiara
Verifica conoscenze / abilità/ competenze fondamentali?	☐ Sì	☒ Solo parzialmente	☐ No		
Per la risoluzione del problema è utile usare una calcolatrice grafica?	☒ Sì	☐ No	☐ Parzialmente		

Commento sintetico

Il livello di difficoltà del problema 2 è piuttosto alto. Alcuni punti, come il 4), richiedono una capacità di astrazione del tutto inusuale anche nei Licei Scientifici.
Si noti che nel punto 3) era richiesto il calcolo di un integrale definito in cui un estremo di integrazione è un valore approssimato. In questo caso era utile usare una calcolatrice grafica, almeno per determinare velocemente lo zero della funzione.