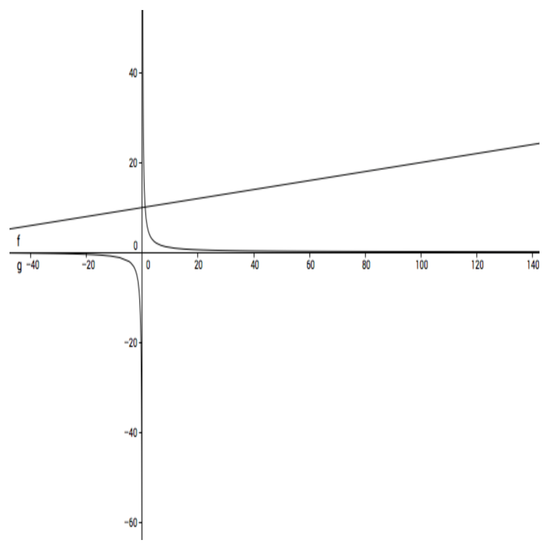
Problemi

Problema 1) Indichiamo con $x > 0$ il numero di minuti di conversazione effettuati in un mese.
1) Le espressioni cercate per $f(x)$ e $g(x)$ sono

$$f(x) = 10 + \frac{x}{10}, \qquad g(x) = \frac{f(x)}{x} = \frac{10}{x} + \frac{1}{10}.$$

Poiché $g'(x) = -\frac{10}{x^2} < 0$, otteniamo che la funzione $g(x)$ decresce dal valore $+\infty$ al valore $\frac{1}{10}$ per $x \to +\infty$, e non possiede quindi né massimi né minimi relativi. La funzione $f(x)$ cresce linearmente in x, ossia "piú parli piú spendi", mentre la funzione $g(x)$ decresce al valore $\frac{1}{10}$ per $x \to +\infty$, ossia "piú parli, meno incide il canone fisso". I grafici di $f(x)$ e $g(x)$ sono rappresentati nel seguente piano cartesiano per $x \in \mathbb{R}$:



2) Dato $x_0 > 0$ fissato, dobbiamo risolvere in x_1 la seguente equazione:

$$g(x_1) = \frac{10}{x_1} + \frac{1}{10} = \frac{g(x_0)}{2} = \frac{1}{2}[\frac{10}{x_0} + \frac{1}{10}],$$

ossia

$$x_1 = \frac{200x_0}{100 - x_0}.$$

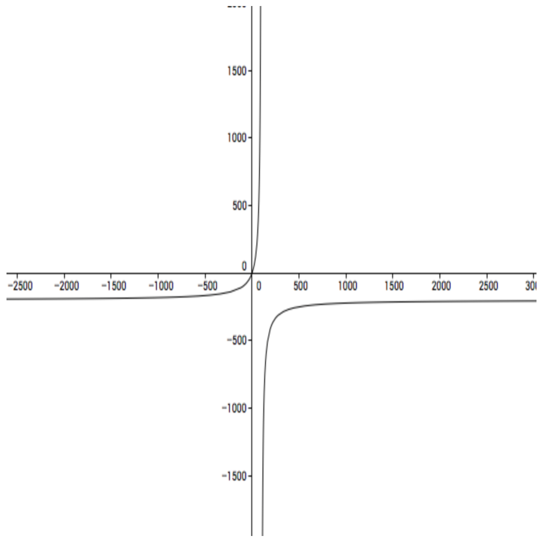
La funzione $h(x) = \frac{200x}{100-x}$ è strettamente crescente poiché

$$h'(x) = \frac{20000}{(100 - x_0)^2} > 0.$$

Inoltre la funzione ha un asintoto verticale in $x = 100$ con

$$\lim_{x \to 100^{\pm}} h(x) = \mp\infty.$$

Quando x_0 si avvicina a 100, $\frac{g(x_0)}{2}$ si avvicina al valore $\frac{1}{10}$ che rappresenta giá il costo medio al minuto senza canone fisso, e quindi il corrispondente $x_1 = h(x_0)$ deve essere tale da far pesare sempre meno il canone fisso, ossia $x_1 \to +\infty$. Il grafico di $h(x)$ è rappresentato nel seguente piano cartesiano per $x \in \mathbb{R}$:



3) Rappresentando il margine superiore della zona come $y = ax^2 + bx + c$, l'appartenenza di A, B e C a tale curva determina il valore delle costanti come $a = -\frac{1}{8}$, $b = 1$ e $c = 2$. La funzione risultante è $y = -\frac{x^2}{8} + x + 2$, e quindi l'area $\mathcal{A}$ della zona coperta dal segnale risulta essere

$$\mathcal{A} = \int_0^6 [-\frac{x^2}{8} + x + 2] \; dx - \frac{1}{2} = \frac{41}{2}.$$

La zona rappresentata nella mappa ha area maggiore di 24, e quindi la percentuale di copertura risulta essere minore di $\frac{41}{48}$. Essendo $\frac{41}{48} < \frac{96}{100}$, l'operatore telefonico ha pubblicizzato una percentuale di copertura piú elevata di quella reale.

4) La nuova funzione $f_1(x)$ è

$$f_1(x) = \begin{cases} 10 + \frac{x}{10} & \text{se } 0 < x \leq 500 \\ -40 + \frac{x}{5} & \text{se } x > 500, \end{cases}$$

e di conseguenza la nuova $g_1(x)$ si scrive come

$$g(x) = \begin{cases} \frac{10}{x} + \frac{1}{10} & \text{se } 0 < x \leq 500 \\ -\frac{40}{x} + \frac{1}{5} & \text{se } x > 500. \end{cases}$$

La funzione $f_1(x)$ cresce linearmente come $f(x)$, con coefficiente angolare minore per $0 < x \leq 500$ rispetto a $x > 500$. Diversamente da $f(x)$, la funzione $f_1(x)$ non è derivabile in $x = 500$.

La funzione $g_1(x)$ decresce dal valore $+\infty$ al valore $g_1(500) = \frac{3}{25}$ per $x \in (0, 500]$, e poi cresce dal valore $\frac{3}{25}$ a $\frac{1}{5}$ per $x \to +\infty$. Quindi la funzione $g_1(x)$ non ammette massimo ma

$$\min_{x>0} g_1(x) = \frac{3}{25}.$$

Presenta inoltre un asintoto verticale in $x = 0$ e un asinototo orizzontale $y = \frac{1}{5}$ a $+\infty$. Pur essendo continua, la funzione $g_1(x)$ non è derivabile in $x = 500$. Il significato nella situazione concreta indica che il costo medio scende a $\frac{3}{25}$ fino a $x = 500$ minuti, per poi salire dopo il $500-$esimo minuto fino a 20 centesimi$=\frac{1}{5}$, dovuto al sovrapprezzo della tariffa applicato dal gestore.

Problema 2) Dal Teorema Fondamentale del Calcolo abbiamo che $g(x) = \int_{-3}^{x} f(t)\ dt + c$, $c \in \mathbb{R}$. Poiché

$$\int_{-3}^{3} f(t)\ dt = -\text{Area } A + \text{Area } B - \text{Area } C - \text{Area } D = -3$$

otteniamo che

$$g(x) = \int_{-3}^{x} f(t)\ dt - 2.$$

1) Se $f(x)$ è un polinomio con 3 punti a tangente orizzontale, allora $f'(x)$ è un polinomio che ha sicuramente tre zeri, ossia -1, $+1$ e 2. Quindi $f'(x)$ è almeno di grado 3 e di conseguenza $f(x)$ ha grado minimo quattro.
2) Poiché $g'(x) = f(x) \geq 0$ vale in $[-2, 0]$, dallo studio del segno della derivata otteniamo che $g(x)$ ha un massimo relativo sia in $x = -3$ che in $x = 0$. Inoltre, poiché $g''(x) = f'(x) \geq 0$ in $[-3, -1] \cup [1, 2]$, otteniamo che $g(x)$ volge la concavitá verso l'alto per $x \in [-3, -1] \cup [1, 2]$.
3) Abbiamo

$$g(0) = \int_{-3}^{0} f(t)\ dt - 2 = -\text{Area } A + \text{Area } B - 2 = -1$$

e dal Teorema de L'Hôpital

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 + g(x)}{2x} = \lim_{x \to 0} \frac{g'(x)}{2} = \frac{f(0)}{2} = 0.$$

4) Dal cambio di variabile $y = 2x + 1$, $dy = 2dx$, deduciamo che

$$\int_{-2}^{1} h(x)\ dx = 3 \int_{-2}^{1} f(2x + 1)\ dx = \frac{3}{2} \int_{-3}^{3} f(y)\ dy = \frac{3}{2}[g(3) + 2] = -\frac{9}{2}.$$

Questionario

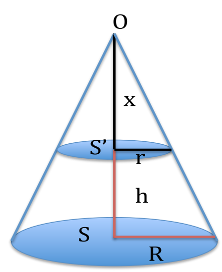
1) Dal Teorema Fondamentale del Calcolo otteniamo che

$$f(x) = -\frac{2}{3}x^3 + 6x + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Detta x_0 l'ascissa del punto di tangenza, l'ipotesi $(x_0, f(x_0))$ appartenente al secondo quadrante si traduce in $x_0 < 0$, $f(x_0) > 0$. Imponendo che il coefficiente angolare della retta tangente $y = -2x + 5$ coincida con la derivata prima di $f(x)$ nel punto di tangenza x_0, otteniamo $x_0 = -2$ come soluzione dell'equazione $f'(x_0) = -2$, $x_0 < 0$.
Determinato il punto di tangenza $P(-2, 9)$, imponiamo che P appartenga al grafico della funzione $f(x)$. Si ottiene cosí $c = \frac{47}{3}$ e

$$f(x) = -\frac{2}{3}x^3 + 6x + \frac{47}{3}.$$

2) Il volume V del tronco di cono si calcola come differenza dei volumi dei coni di medesimo vertice O e basi coincidenti con quelle del tronco



Quindi V ha la seguente espressione:

$$V = \frac{1}{3}S(h + x) - \frac{1}{3}S'x. \tag{1}$$

Per il Teorema delle sezioni parallele:

$$S : S' = (h + x)^2 : x^2,$$

deduciamo che $x = \frac{h\sqrt{S'}}{\sqrt{S}-\sqrt{S'}}$. Sostituendo in (1) otteniamo che

$$V = \frac{1}{3}hS + \frac{1}{3}hS' + \frac{1}{3}h\sqrt{SS'}.$$

Da $S = \pi R^2$ e $S' = \pi r^2$ si ottiene l'espressione richiesta per V.

3) Il numero totale di lanci possibili è $2^6 = 64$. Dato $k = 0, \ldots, 6$, il numero di lanci possibili con l'uscita di esattamente k volte testa è dato dal coefficiente binomiale $\binom{6}{k}$, il numero di combinazioni semplici di 6 elementi di classe k. La probabilitá p_1 di ottenere al piú due volte testa si ottiene quindi come

$$p_1 = \frac{\binom{6}{0} + \binom{6}{1} + \binom{6}{2}}{64} = \frac{1 + 6 + 15}{64} = \frac{11}{32}.$$

La probabilitá p_2 di ottenere almeno due volte testa si calcola invece come

$$p_2 = \frac{64 - \binom{6}{0} - \binom{6}{1}}{64} = \frac{64 - 1 - 6}{64} = \frac{57}{64}.$$

4) Calcoliamo la derivata prima e seconda di $y(x)$:

$$y'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}, \qquad y''(x) = \frac{2\ln x - 3}{x^3}.$$

Sostituendo $y'(x)$ e $y''(x)$ nelle equazioni proposte, si deduce che $y(x)$ è soluzione della quarta equazione, come segue da

$$x^2 y''(x) + x y'(x) + \frac{2}{x} = \frac{\ln x}{x} = y(x).$$

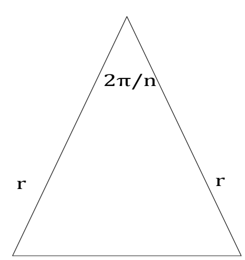
5) Dato il piano $ax+by+cz = d$ con $a = b = 1$, $c = -1$ e $d = 0$, abbiamo che la retta perpendicolare al piano in $(x_0, y_0, z_0) = (0, 0, 0)$ ha equazione cartesiana

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}.$$

Otteniamo quindi la retta $x = y = -z$.

6) La funzione $f(x)$ rappresenta la somma delle distanze al quadrato di x da $1, 2, 3, 4, 5$. Data la simmetria dei punti $1, 2, 3, 4, 5$ rispetto a 3, si puó intuire che 3 è il punto di minimo assoluto per $f(x)$ in $\mathbb{R}$ con valore minimo $f(3) = 10$. Per una deduzione rigorosa, basta studiare il segno della derivata prima $f'(x) = 10(x - 3)$.

7) Il poligono regolare di n lati inscritto in un cerchio di raggio r è composto da n triangoli disgiunti, isosceli con due lati di lunghezza r ed angolo compreso $\frac{2\pi}{n}$:



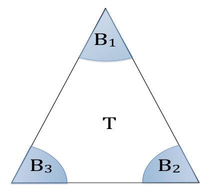
Considerando r come base, l'altezza corrispondente è $r \sin \frac{2\pi}{n}$ e l'area vale $\frac{r^2}{2} \sin \frac{2\pi}{n}$. Otteniamo quindi

$$A(n) = \frac{nr^2}{2} \sin \frac{2\pi}{n}.$$

Geometricamente si ha che $\lim_{n \to +\infty} A(n)$ fornisce l'area del cerchio di raggio r, come si deduce dal limite notevole:

$$\lim_{n \to +\infty} A(n) = \pi r^2 \lim_{n \to +\infty} \frac{\sin \frac{2\pi}{n}}{\frac{2\pi}{n}} = \pi r^2.$$

8) Dati i settori circolari B_1, B_2, B_3 di raggio $r = 2$ centrati nei tre vertici:



essi sono disgiunti e la regione $B_1 \cup B_2 \cup B_3$ è equivalente ad un semicerchio di raggio $r = 2$ poiché la somma degli angoli interni del triangolo T vale π. Abbiamo che

$$\text{Area } (B_1) + \text{Area } (B_2) + \text{Area } (B_3) = \frac{\pi}{2} r^2 = 2\pi$$

e Area $(T) = \frac{5}{4}\sqrt{119}$. La probabilitá cercata p vale

$$p = \frac{\text{Area } (T) - \text{Area } (B_1) - \text{Area } (B_2) - \text{Area } (B_3)}{\text{Area } (T)} = \frac{5\sqrt{119} - 8\pi}{5\sqrt{119}}.$$

9) Per poter applicare il Teorema di Lagrange, dobbiamo scegliere $k \in \mathbb{R}$ in modo tale che f risulti continua e derivabile in $x = 1$. Da

$$\lim_{x \to 1^-} x^3 = 1 = \lim_{x \to 1^+} [x^2 - kx + k]$$

e

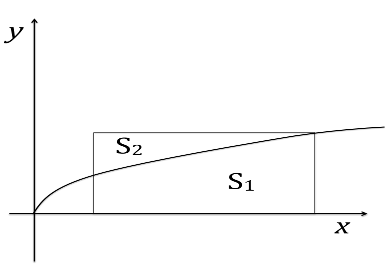
$$\lim_{h \to 0^-} \frac{(1+h)^3 - 1}{h} = 3, \quad \lim_{h \to 0^+} \frac{(1+h)^2 - k(1+h) + k}{h} = 2 - k,$$

otteniamo che $k = -1$. Vogliamo poi determinare $x_0 \in (0, 2)$ che soddisfi

$$f'(x_0) = \frac{f(2) - f(0)}{2 - 0} = \frac{5}{2}.$$

Siccome $f'(1) = 3$, possiamo studiare separatamente $f'(x_0) = 3x_0^2 = \frac{5}{2}$ in $[0, 1)$ e $f'(x_0) = 2x_0 + 1 = \frac{5}{2}$ in $(1, 2]$, giungendo all'unica soluzione $x_0 = \sqrt{\frac{5}{6}}$.

10) In accordo con



poniamo

$$S_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x \leq 4,\ 0 \leq y \leq \sqrt{x}\}, \qquad S_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x \leq 4,\ \sqrt{x} \leq y \leq 2\}.$$

Dal Teorema Fondamentale del Calcolo abbiamo che

$$\text{Area } (S_1) = \int_1^4 f(x)\ dx = \frac{14}{3}, \qquad \text{Area } (S_2) = 6 - \text{Area } (S_1) = \frac{4}{3}.$$

Otteniamo quindi

$$\frac{\text{Area } (S_1)}{\text{Area } (S_2)} = \frac{7}{2}.$$

Prof. Claudia Di Giulio, Liceo Scientifico Aristotele, Roma
Prof. Pierpaolo Esposito, Universitá degli Studi Roma Tre, Roma