ESAMI DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO

PIANO NAZIONALE DI INFORMATICA

<u>Sessione 2001</u>

SECONDA PROVA SCRITTA

Tema di MATEMATICA

Sessione suppletiva

PROBLEMA 1

Le misure *a, b, c* dei lati di un triangolo ABC sono in progressione aritmetica di ragione k.

a) Si esprima, in funzione di k, il raggio *r* della circonferenza inscritta nel triangolo;

b) si stabilisca il valore di k per il quale *r* è massimo;

c) si fissi nel piano del triangolo un conveniente sistema di assi cartesiani , ortogonali e monometrici, e, per il valore di k determinato in b), si scrivano le coordinate dei vertici del triangolo ABC nonché le equazioni delle circonferenze, inscritta e circoscritta, a ABC;

d) si calcoli il rapporto tra i volumi delle due sfere di cui le circonferenze, inscritta e circoscritta, sono sezioni diametrali.

PROBLEMA 2

Una industria commercializza un suo prodotto confezionandolo in lattine realizzate utilizzando fogli di una lamierina molto sottile. Ciascuna lattina, di assegnata capacità, ha la forma di un cilindro circolare retto.

Trascurando lo spessore del materiale, il candidato determini:

a) le dimensioni della lattina per la quale occorre la minima quantità di materiale per realizzarla.

Successivamente, posto il volume della lattina pari a *2 decilitri*, se ne esplicitino le misure delle dimensioni:

b) nel caso di cui al punto a);

c) nel caso in cui si voglia che il diametro della base sia sezione aurea dell'altezza.

QUESTIONARIO

1. Enunciare il teorema del *valor medio o* di *Lagrange* illustrandone il legame con il teorema di *Rolle* e le implicazioni ai fini della determinazione della crescenza o decrescenza delle curve.

2. Calcolare la derivata della funzione

$$f(x) = \arctan x - \arctan \frac{x-1}{x+1}$$

Quali conclusioni se ne possono trarre per la f(x)?

3. Dire qual è il dominio della funzione $f(x) = x^{\pi} - \pi^{x}$ e stabilire il segno della derivata prima e quello della derivata seconda di *f(x)* nel punto $x = \pi$.

4. Calcolare, integrando per parti:

$$\int_0^1 \arcsin x dx$$

5. Spiegare, anche con esempi appropriati, il significato in matematica di "*concetto primitivo"* e di *"assioma"* .

6. Nell'insieme delle cifre 1,2,3,………..,9 se ne scelgono due a caso. La loro somma è pari: determinare la probabilità che entrambe le cifre siano dispari.

7. Verificato che l'equazione $x^3 - 2x - 5 = 0$ ammette una sola radice reale compresa tra 2 e 3, se ne calcoli un'approssimazione applicando uno dei metodi numerici studiati.

8. Calcolare il rapporto tra la superficie totale di un cilindro equilatero e la superficie della sfera ad esso circoscritta.

9. Dire (motivando la risposta) se è possibile inscrivere in una semicirconferenza un triangolo che non sia rettangolo. Ovvero, con i versi di Dante:

..… se del mezzo cerchio far si puote
triangol sì ch' un retto non avesse. (Paradiso, XIII, 101-102)

PROBLEMA1

Punto a

Una successione numerica si dice progressione aritmetica di ragione k quando la differenza fra ogni termine e il suo precedente è costante e vale k. Nel caso in esame, fissato il lato di misura a, gli altri due lati del triangolo misurano $\begin{cases} b = a + k \\ c = b + k = a + 2k \end{cases}$.

Il raggio della circonferenza inscritta è pari al rapporto tra l'area ed il semiperimetro del triangolo: $r(k) = \dfrac{S(k)}{p(k)}$. Il semiperimetro vale $p(k) = \dfrac{a+b+c}{2} = \dfrac{a+a+k+a+2k}{2} = \dfrac{3}{2}(a+k)$, mentre l'area per la formula di Erone vale

$$S(k) = \sqrt{p(k)\cdot[p(k)-a]\cdot[p(k)-b]\cdot[p(k)-c]} =$$

$$= \sqrt{\frac{3}{2}(a+k)\cdot\left[\frac{3}{2}(a+k)-a\right]\cdot\left[\frac{3}{2}(a+k)-(a+k)\right]\cdot\left[\frac{3}{2}(a+k)-(a+2k)\right]} =$$

$$= \sqrt{\frac{3}{2}(a+k)\cdot\left(\frac{a+3k}{2}\right)\cdot\left(\frac{a+k}{2}\right)\cdot\left(\frac{a-k}{2}\right)} = \sqrt{\left(\frac{a+k}{4}\right)^2\cdot 3\cdot(a+3k)\cdot(a-k)} =$$

$$= \left(\frac{a+k}{4}\right)\cdot\sqrt{3\cdot\left(-3k^2+2ak+a^2\right)}$$

Il raggio della circonferenza inscritta vale allora

$$r(k) = \frac{S(k)}{p(k)} = \frac{\left(\frac{a+k}{4}\right)\cdot\sqrt{3\cdot\left(-3k^2+2ak+a^2\right)}}{\frac{3}{2}(a+k)} = \frac{1}{6}\sqrt{3\cdot\left(-3k^2+2ak+a^2\right)}$$

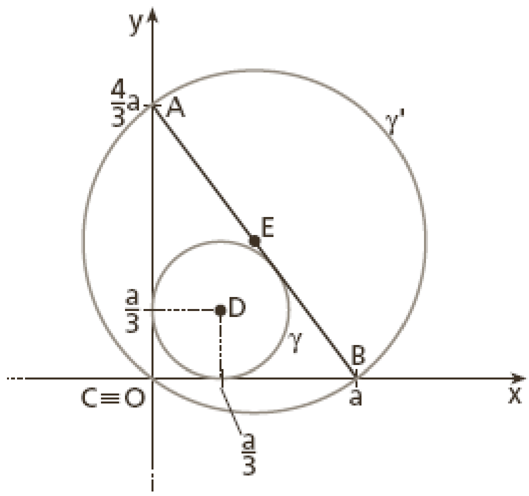
Punto b

Il valore di k che massimizza $r(k)$ è lo stesso che massimizza $r^2(k)$, per cui bisogna trovare il massimo della funzione $f(k) = \left(-3k^2+2ak+a^2\right)$. Questa funzione è una parabola con concavità verso il basso che raggiunge il suo massimo nell'ascissa del vertice $k = \frac{1}{3}a$; analogamente proseguendo mediante derivazione scopriamo che la funzione $r(k)$ è strettamente crescente in $\left(-\infty, \frac{1}{3}a\right)$ e strettamente decrescente in $\left(\frac{1}{3}a, +\infty\right)$ da cui deduciamo la presenza di un massimo relativo per $k = \frac{1}{3}a$. In corrispondenza di $k = \frac{1}{3}a$ il valore massimo assunto è $r\left(\frac{1}{3}a\right) = \frac{1}{3}a$.

Notiamo che in tal caso i lati dei tre triangoli misurano $a, b = \frac{4}{3}a, c = \frac{5}{3}a$ cioè il triangolo è rettangolo.

Punto c

Consideriamo un sistema di riferimento cartesiano Oxy con $O \equiv C$ cioè con origine coincidente con il vertice del triangolo rettangolo e con gli altri due vertici A e B rispettivamente sull'asse delle ordinate e delle ascisse. Di seguito la geometria del problema.



In questo sistema di riferimento i vertici del triangolo hanno coordinate $A\left(0, \frac{4}{3}a\right), B(a,0), C(0,0)$

La circonferenza inscritta ha raggio $r = \frac{1}{3}a$ e centro $D\left(\frac{1}{3}a, \frac{1}{3}a\right)$ per cui ha equazione $\left(x - \frac{1}{3}a\right)^2 + \left(y - \frac{1}{3}a\right)^2 = \left(\frac{1}{3}a\right)^2 \to a^2 + y^2 - \frac{2}{3}ax - \frac{2}{3}ay + \frac{1}{9}a^2 = 0$.

Per determinare l'equazione della circonferenza circoscritta, basta notare che, essendo il triangolo ABC rettangolo e quindi inscrivibile in una semicirconferenza, il suo centro coincide col punto medio del segmento AB, per cui $E\left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}\right) \to E\left(\frac{1}{2}a, \frac{2}{3}a\right)$; il raggio, invece, è pari ad $R = \frac{\overline{AB}}{2} = \frac{5}{6}a$ per cui l'equazione della circonferenza circoscritta è $\left(x - \frac{1}{2}a\right)^2 + \left(y - \frac{2}{3}a\right)^2 = \left(\frac{5}{6}a\right)^2 \to a^2 + y^2 - ax - \frac{4}{3}ay = 0$.

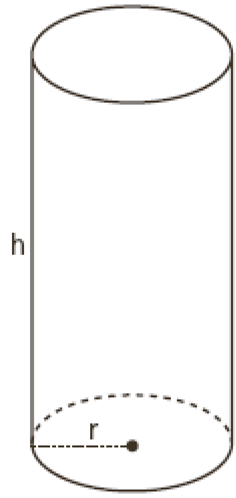
Punto d

Il rapporto tra i volumi delle sfere è pari al cubo del rapporto tra i raggi, e cioè $\frac{V}{V'} = \left[\frac{\left(\frac{1}{3}a\right)}{\left(\frac{5}{6}a\right)}\right]^3 = \left(\frac{2}{5}\right)^3 = \frac{8}{125}$.

PROBLEMA2

Punto a

Consideriamo la figura a lato.



Il cilindro di altezza h e raggio di base r ha capacità, e quindi volume, $V=\pi r^2 h$ costante, da cui ricaviamo $h=\frac{V}{\pi r^2}$. L'area totale del cilindro è pari alla somma delle due aree di base e dell'area laterale, cioè

$$S_T(r)=2S_{Base}+S_{Laterale}=2\pi r^2+2\pi r h \overset{h=\frac{V}{\pi r^2}}{=} 2\pi r^2+\frac{2V}{r}=2\left(\frac{\pi r^3+V}{r}\right).$$

Cerchiamo il minimo della funzione $S_T(r)=2\left(\frac{\pi r^3+V}{r}\right)$ posto $r>0$. La derivata prima vale $S_T^{'}(r)=2\left(\frac{2\pi r^3-V}{r^2}\right)$ per cui $S_T(r)$ è strettamente decrescente in $\left(0,\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}\right)$ e strettamente crescente in $\left(\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}},+\infty\right)$ da cui deduciamo che la superficie è minima per $r=\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$. In tal caso l'altezza corrispondente misura $h=\frac{V}{\pi\left(\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}\right)^2}=\sqrt[3]{\frac{4V}{\pi}}=2r$, cioè il cilindro di area minima è tale per cui l'altezza coincide col diametro di base; pertanto trattasi di cilindro equilatero.

Punto b

Posto $V=2\,\text{decilitri}=200\,\text{cm}^3$, si ha $h=2r=\sqrt[3]{\frac{800}{\pi}}[\text{cm}]\cong 6{,}3[\text{cm}]$

Punto c

Se il diametro di base è la sezione aurea dell'altezza si ha $d=\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)h$; ricordando che $h=\frac{V}{\pi r^2}=\frac{4V}{\pi d^2}$, si ha $d=\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)\left(\frac{4V}{\pi d^2}\right)\to d^3=\frac{2V}{\pi}\left(\sqrt{5}-1\right)$. Posto $V=2\,\text{decilitri}=200\,\text{cm}^3$, si ha $d^3=\frac{400}{\pi}\left(\sqrt{5}-1\right)\to d=\sqrt[3]{\frac{400}{\pi}\left(\sqrt{5}-1\right)}\cong 5{,}4[\text{cm}]$ cui corrisponde $h=\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)d=\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)\sqrt[3]{\frac{400}{\pi}\left(\sqrt{5}-1\right)}\cong 8{,}7[\text{cm}]$.

QUESTIONARIO

Quesito 1

Il teorema di Lagrange (o del valor medio) afferma che se una funzione reale di variabile reale è continua in un intervallo [a; b] e derivabile in (a; b), esiste almeno un punto interno all'intervallo in cui la tangente al grafico della funzione è parallela alla retta che congiunge i punti del grafico corrispondenti agli estremi dell'intervallo [a;b]. Questa è l'interpretazione geometrica del teorema di Lagrange.

In modo formale:

1. Sia $f:[a,b]\to R$
2. continua in [a, b]
3. derivabile in (a, b)

allora in queste ipotesi $\exists c\in(a,b): f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Se la funzione $f:[a,b]\to R$ è tale per cui $f(a)=f(b)$, il teorema di Lagrange si riduce a quello di Rolle: infatti nelle ipotesi di cui sopra $\exists c\in(a,b): f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=0$.

Il teorema di Lagrange permette di dimostrare un importante teorema sulla crescenza e decrescenza delle funzioni. Detta $f:I\to R$ continua in *I* e derivabile internamente ad *I*, essa è:

1. crescente in *I*, se in ogni punto interno di *I* la sua derivata prima è positiva;
2. decrescente in *I*, se in ogni punto interno di *I* la sua derivata prima è negativa.

Posto $x_1<x_2$ con $x_1,x_2\in I$, applicando il teorema di Lagrange in $[x_1,x_2]$ si ha: $\exists c\in(x_1,x_2): f'(c)=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$. Supponiamo $f'(c)>0$; essendo $x_1<x_2$, la condizione $f'(c)=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}>0$ equivale a $f(x_2)>f(x_1)$. Poiché $x_1,x_2\in I$ e sono generici si deduce la crescenza della funzione in tutto *I*. Analogamente si dimostra la decrescenza supponendo $f'(c)<0$.

Quesito 2

La funzione $f(x)=\arctan x-\arctan\frac{x-1}{x+1}$ è definita in $R-\{-1\}$. La sua derivata prima è:

$$f'(x)=\frac{1}{1+x^2}-\frac{\frac{1\cdot(x+1)-1\cdot(x-1)}{(x+1)^2}}{1+\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2}=\frac{1}{1+x^2}-\frac{\frac{2}{(x+1)^2}}{\frac{(x+1)^2+(x-1)^2}{(x+1)^2}}=$$

$$=\frac{1}{1+x^2}-\frac{\frac{2}{(x+1)^2}}{\frac{2(1+x^2)}{(x+1)^2}}=\frac{1}{1+x^2}-\frac{1}{1+x^2}=0$$

La derivata quindi risulta nulla in $R-\{-1\}$; da ciò deduciamo che la funzione è costante a tratti in ognuno degli intervalli $(-\infty,-1)$ e $(-1,+\infty)$. Per trovare le costanti basta valutare la funzione in due punti che cadono rispettivamente negli intervalli $(-\infty,-1)$ e $(-1,+\infty)$.

Per l'intervallo $(-\infty,-1)$ possiamo valutare la funzione in $x=-\sqrt{3}$ ottenendo $f(-\sqrt{3})=\arctan(-\sqrt{3})-\arctan\left(\frac{-\sqrt{3}-1}{-\sqrt{3}+1}\right)=\arctan(-\sqrt{3})-\arctan(2+\sqrt{3})=-\frac{\pi}{3}-\frac{5\pi}{12}=-\frac{3\pi}{4}$; per l'intervallo $(-1,+\infty)$possiamo valutare la funzione in $x=1$ ottenendo $f(1)=\arctan(1)-\arctan\left(\frac{1-1}{1+1}\right)=\arctan(1)-\arctan(0)=\arctan(1)=\frac{\pi}{4}$. In conclusione

$$f(x)=\begin{cases}-\frac{3\pi}{4} & \text{se } x<-1\\ \frac{\pi}{4} & \text{se } x>-1\end{cases}.$$

Quesito 3

La funzione in esame può essere così scritta: $f(x)=f_1(x)-f_2(x)$ in cui il dominio di $f_1(x)=x^\pi$ è R^+, mentre il dominio di $f_2(x)=\pi^x$ è tutto R; quindi anche la funzione differenza ha come dominio R^+ e cioè $(0,+\infty)$. Tuttavia, essendo l'esponente π positivo, la funzione è prolungabile per continuità in $x=0$ in cui vale $f(0)=-1$.

Le derivate sono:

$$f'(x)=\pi\cdot x^{\pi-1}-\ln\pi\cdot\pi^x$$
$$f''(x)=\pi\cdot(\pi-1)\cdot x^{\pi-2}-\ln^2\pi\cdot\pi^x$$

e valutate per $x=\pi$ forniscono

$$f'(\pi)=\pi\cdot\pi^{\pi-1}-\ln\pi\cdot\pi^\pi=\pi^\pi\cdot(1-\ln\pi)$$
$$f''(\pi)=\pi\cdot(\pi-1)\pi^{\pi-2}-\ln^2\pi\cdot\pi^\pi=\pi^\pi(1-\ln^2\pi)-\pi^{\pi-1}$$

Ora essendo $\pi > e \Rightarrow \ln\pi > \ln e = 1$ per cui $f'(\pi) < 0, f''(\pi) < 0$; in conclusione entrambe le derivate in $x = \pi$ assumono valore negativo.

Quesito 4

Integrando per parti si ha:

$$\int_0^1 \arcsin x dx = [x \arcsin x]_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx = [x \arcsin x]_0^1 + \int_0^1 \frac{(-x)}{\sqrt{1-x^2}} dx =$$
$$= [x \arcsin x]_0^1 + \left[\sqrt{1-x^2}\right]_0^1 = \frac{\pi}{2} - 1 = \frac{\pi - 2}{2}$$

Quesito 5

Un concetto primitivo è un “oggetto” che non viene definito ma viene accettato come noto. Ad esempio concetti o enti primitivi nella geometria euclidea sono il punto e la retta. Gli assiomi o postulati sono delle proposizioni che non si dimostrano, accettate come vere, e che stabiliscono relazioni tra gli enti primitivi: cioè gli assiomi chiariscono le proprietà di base dei concetti primitivi. Nella geometria euclidea la proposizione per cui data una retta ed un punto P non appartenente ad essa, esiste un’unica retta parallela ad essa e passante per P è un assioma.

Quesito 6

Il numero di possibili coppie estratte è pari al coefficiente binomiale $C_{9,2} = \binom{9}{2} = \frac{9!}{2!\cdot 7!} = \frac{8\cdot 9}{1\cdot 2} = 36$.

Di queste 36, forniamo per enumerazione tutte le coppie la cui somma è pari:

$(1,3),(1,5),(1,7),(1,9),(3,5),(3,7),(3,9),(5,7),(5,9),(7,9),(2,2),(2,4),(2,6),(2,8),(4,6),(4,8),(6,8)$.

Le coppie la cui somma è pari sono 16 di cui 10 sono formate da numeri dispari e sei da numeri pari, per cui la probabilità richiesta, valutata come rapporto tra casi favorevoli sui possibili, è $p = \frac{10}{16} = \frac{5}{8}$.

Quesito 7

La funzione $f(x) = x^3 - 2x - 5$ è continua e derivabile in tutto R; nell’intervallo [2,3] assume valori discordi agli estremi in quanto $f(2) = -1 < 0, f(3) = 16 > 0$ per cui a norma del teorema degli zeri essa si annullerà almeno una volta in [2,3]; inoltre dallo studio della derivata prima $f'(x) = 3x^2 - 2$ deduciamo che è strettamente crescente in [2,3], da cui deduciamo che lo zero in [2,3] è unico.

Per calcolare lo zero ci avvaliamo del metodo delle tangenti e la formula da utilizzare definita per ricorrenza è $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{x_n^3 - 2x_n - 5}{3x_n^2 - 2} = \frac{2x_n^3 + 5}{3x_n^2 - 2}$ con punto iniziale $x_0 = 3$, visto che la funzione $f(x) = x^3 - 2x - 5$ e la sua derivata seconda $f''(x) = 6x$ in $x_0 = 3$ sono concordi.

Sviluppando questo metodo si ha:

$$x_1 = \frac{2x_0^3+5}{3x_0^2-2} = 2{,}360$$

$$x_2 = \frac{2x_1^3+5}{3x_1^2-2} \cong 2{,}127$$

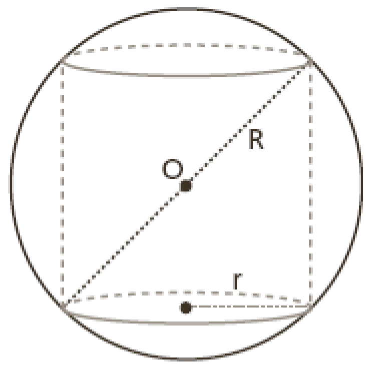
$$x_3 = \frac{2x_2^3+5}{3x_2^2-2} \cong 2{,}095$$

$$x_4 = \frac{2x_3^3+5}{3x_3^2-2} \cong 2{,}094$$

Poiché $|x_4 - x_3| = 0{,}001 < \frac{1}{100}$, deduciamo che $\alpha \cong 2{,}094$ è un'approssimazione con due cifre decimali esatte.

Quesito 8

Consideriamo la figura a lato rappresentante in sezione il cilindro inscritto in una sfera.



Il cilindro è equilatero per cui ha altezza pari al diametro di base, $h = 2r$. L'area totale del cilindro è pari alla somma delle aree di base e dell'area laterale: $S_{Cilindro} = 2\pi r^2 + 2\pi rh = 2\pi r^2 + 2\pi r \cdot (2r) = 6\pi r^2$. Il raggio della sfera è pari a $R = r\sqrt{2}$ cui corrisponde l'area $S_{Sfera} = 4\pi R^2 = 8\pi r^2$. Quindi $\frac{S_{Cilindro}}{S_{Sfera}} = \frac{6\pi r^2}{8\pi r^2} = \frac{3}{4}$.

Quesito 9

Consideriamo la figura a lato in cui è rappresentato un triangolo ABC inscritto in una semicirconferenza di centro O e diametro AB. Si vuole dimostrare che il triangolo ABC è rettangolo in C. La dimostrazione la conduciamo per assurdo. Supponiamo che l'angolo $A\hat{C}B$ non sia retto. Per un noto teorema che afferma che l'angolo al centro è il doppio dell'angolo alla circonferenza si ha $A\hat{O}B = 2A\hat{C}B$ e poiché $A\hat{C}B$ non è retto $A\hat{O}B = 2A\hat{C}B$ non è piatto. Ma questo è un assurdo in quanto va contro l'ipotesi che il triangolo è inscritto in una semicirconferenza, e quindi ha un lato coincidente col diametro. Pertanto $A\hat{C}B$ è retto.