ESAMI DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO
PIANO NAZIONALE DI INFORMATICA – SCIENTIFICO BROCCA
Sessione 2002
seconda prova scritta
Tema di MATEMATICA

Il candidato risolva uno dei due problemi e 5 dei 10 quesiti del questionario.

PROBLEMA 1

Nel piano riferito a coordinate cartesiane ortogonali monometriche (x,y) è assegnata la funzione:

$$y = \frac{a + b\log(x)}{x}$$

ove $\log(x)$ denota il logaritmo naturale di x e *a* e *b* sono numeri reali non nulli.

a) Si trovino i valori di *a* e *b* per i quali il grafico G della funzione passa per i punti $(e^{-1}, 0)$ e $(e^2, 3e^{-2})$

b) si studi e si disegni G;

c) si determini l'equazione della curva G' simmetrica di G rispetto alla retta $y = y(1)$;

d) si determini, con uno dei metodi numerici studiati, un'approssimazione dell'area delimitata, per $1 \le x \le 2$, da G e da G';

e) si disegnino, per i valori di *a* e *b* trovati, i grafici di:

$$y = \frac{a + b\log|x|}{|x|} \qquad y = \left|\frac{a + b\log(x)}{x}\right|$$

PROBLEMA 2

E' data la sfera S di centro O e raggio r. Determinare:

a) il cono C di volume minimo circoscritto a S;

b) il cono C' di volume massimo inscritto in S;

c) un'approssimazione in litri della capacità complessiva di C e C', posto *r =1 metro*;

d) la misura, in gradi sessagesimali, dell'angolo del settore circolare sviluppo della superficie laterale del cono C;

e) la misura approssimata, in gradi sessagesimali, dell'angolo di semiapertura del cono C applicando uno dei metodi numerici studiati.

QUESTIONARIO

1. Da un'urna contenente 90 palline numerate se ne estraggono quattro senza reimbussolamento. Supponendo che l'ordine in cui i numeri vengono estratti sia irrilevante, come è nel gioco dell'Enalotto, si calcoli la probabilità che esca la quaterna (7, 47, 67, 87).

2. Calcolare la probabilità che in dieci lanci di una moneta non truccata dal quinto lancio in poi esca sempre testa.

3. Calcolare la derivata rispetto a x della funzione

$$\int_x^b f(t)dt$$

ove *f(x)* è una funzione continua.

4. Calcolare:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x \sin(t^3)dt}{x^4}$$

5. Utilizzando il teorema di Rolle provare che tra due radici reali di $e^x \sin x = 1$ c'è almeno una radice reale di $e^x \cos x = -1$.

6. Applicando il teorema di Lagrange all'intervallo di estremi 1 e x, provare che:

$$1-\frac{1}{x} < \log x < x-1$$

e dare del risultato un'interpretazione grafica.

7. Verificare che la funzione:

$$y=\frac{1-e^{1-x}}{1+e^{1-x}}$$

è invertibile e detta *g* la funzione inversa, calcolare $g'(0)$.

8. Con uno dei metodi di quadratura studiati, si valuti l'integrale definito

$$\int_1^3 \frac{\log x}{x}$$

con un errore inferiore a 10^{-4}.

9. Verificato che l'equazione $\cos x - \log x = 0$ ammette una sola radice positiva compresa tra 1 e 2 se ne calcoli un'approssimazione applicando uno dei metodi numerici studiati.

10. Chiarire, con esempi appropriati, la differenza in matematica tra "*concetto primitivo*" e "*assioma*".

Durata massima della prova : 6 ore

E' consentito l'uso della calcolatrice tascabile non programmabile e la consultazione del vocabolario d'Italiano.

PROBLEMA 1

Nel piano riferito a coordinate cartesiane ortogonali monometriche (x,y) è assegnata la funzione:

$$y=\frac{a+b\log(x)}{x}$$

ove $\log(x)$ **denota il logaritmo naturale di x e** ***a*** **e** ***b*** **sono numeri reali non nulli.**

Punto 1

Si trovino i valori di ***a*** **e** ***b*** **per i quali il grafico G della funzione passa per i punti** $(e^{-1},0)$ **e** $(e^{2},3e^{-2})$

Impostiamo il passaggio per i due punti indicati nella traccia:

$$\begin{cases}\dfrac{a+b\log(e^{-1})}{e^{-1}}=0\\ \dfrac{a+b\log(e^{2})}{e^{2}}=3e^{-2}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a-b=0\\ a+2b=3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=1\\ b=1\end{cases}$$

Quindi la funzione diventa $y=\dfrac{1+\log x}{x}$

Punto 2

si studi e si disegni G;

Studio di $y=\dfrac{1+\log x}{x}$

Dominio: $x>0$ cioè $(0,+\infty)$

Intersezioni asse ascisse: $y=\dfrac{1+\log x}{x}=0\Rightarrow x=e^{-1}$

Intersezioni asse ordinate: non ce ne sono

Positività: $y=\dfrac{1+\log x}{x}>0$ la si risolve studiando separatamente numeratore e denominatore:

$N(x)=1+\log x>0\Rightarrow x>e^{-1}$
$D(x)=x>0$

Mettendo sulla stessa retta gli intervalli del numeratore e denominatore si ricava che

$y=\dfrac{1+\log x}{x}>0\Rightarrow(e^{-1},+\infty)$

Asintoti verticali: $x=0,$ infatti $\lim\limits_{x\to0^{+}}\dfrac{1+\log x}{x}=\dfrac{-\infty}{0^{+}}=\dfrac{1}{0^{+}}\cdot(-\infty)=+\infty\cdot(-\infty)=-\infty$

Asintoti orizzontali: $y=0,$ infatti $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1+\log x}{x}\overset{\text{de l'Hopital}}{=}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=0$

Asintoti obliqui: non ce ne sono

Crescenza e decrescenza: la derivata prima è:

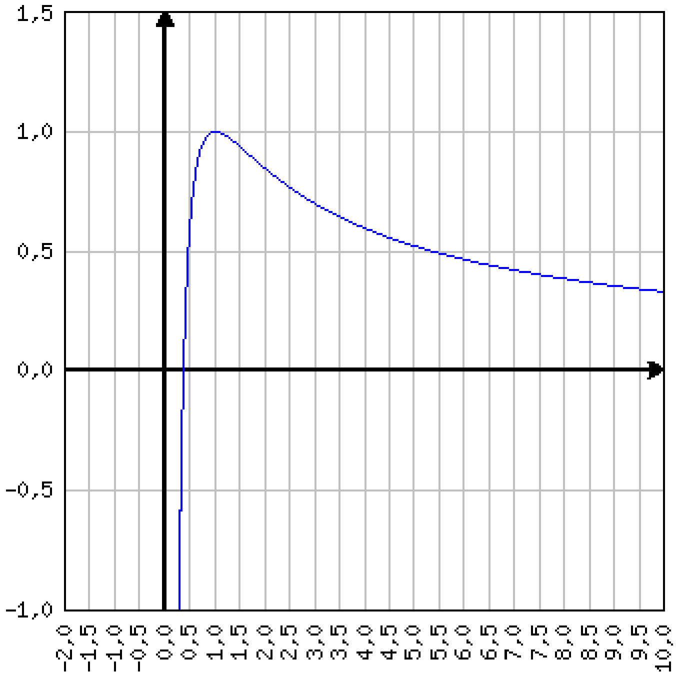
$y'(x) = -\frac{\log x}{x^2}$ per cui $y'(x) > 0 \Rightarrow -\log x > 0$ perchè nel dominio $x^2 > 0 \ \forall x$

Quindi $-\log x > 0 \Rightarrow \log x < 0 \Rightarrow 0 < x < 1$ per cui la funzione è strettamente crescente in $(0,1)$ e strettamente decrescente in $(1,+\infty)$

Flessi: la derivata seconda è: $y''(x) = \frac{2\log x - 1}{x^3}$ per cui $y''(1) = -1 < 0$ cioè $(1,1)$ è un massimo,

mentre $y''(x) = 0 \Rightarrow \log x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \sqrt{e}$ cioè $\left(\sqrt{e}, \frac{3}{2\sqrt{e}}\right)$ è un flesso a tangente obliqua

Il grafico è sotto rappresentato:



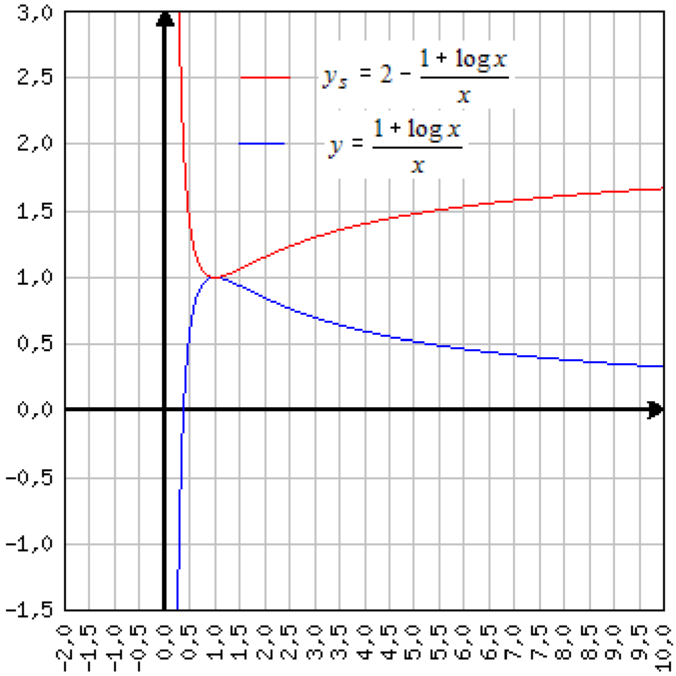
Punto 3

Si determini l'equazione della curva G' simmetrica di G rispetto alla retta $y = y(1)$;

La curva simmetrica rispetto alla retta $y(1) = 1$ è data dall'equazione

$$y_S = 2y(1) - y(x) = 2 - \frac{1 + \log x}{x}$$

Nella figura sottostante vengono rappresentate le due curve sullo stesso grafico:



Punto 4

si determini, con uno dei metodi numerici studiati, un'approssimazione dell'area delimitata, per $1 \le x \le 2$ **, da G e da G';**

L'area cercata è con esattezza:

$$A = \int_1^2 (y_S(x) - y(x))dx = 2\int_1^2 \left(1 - \frac{1+\log x}{x}\right)dx = 2\int_1^2 \left(1 - \frac{1}{x} - \frac{\log x}{x}\right)dx = 2\left[x - \log|x| - \frac{1}{2}\log^2|x|\right]_1^2 =$$

$$\left[2x - 2\log|x| - \log^2|x|\right]_1^2 = 4 - 2\log 2 - \log^2 2 - 2 = 2 - 2\log 2 - \log^2 2 \cong 0.133$$

Attraverso il metodo dei trapezi con la suddivisione dell'intervallo [1,2] in 4 sotto intervalli di ampiezza $\frac{1}{4}$, chiamata $g(x) = 1 - \frac{1}{x} - \frac{\log x}{x}$, si ha:

$$A = 2\int_1^2 \left(1 - \frac{1}{x} - \frac{\log x}{x}\right) \cong 2 \cdot \frac{1}{4}\left[\frac{g(1)+g(2)}{2} + g\left(\frac{5}{4}\right) + g\left(\frac{3}{2}\right) + g\left(\frac{7}{4}\right)\right] \cong$$

$$\cong \frac{1}{2}\left[\frac{0+0.153}{2} + 0.021 + 0.063 + 0.109\right] \cong 0.135$$

Punto 5

si disegnino, per i valori di *a* e *b* trovati, i grafici di:

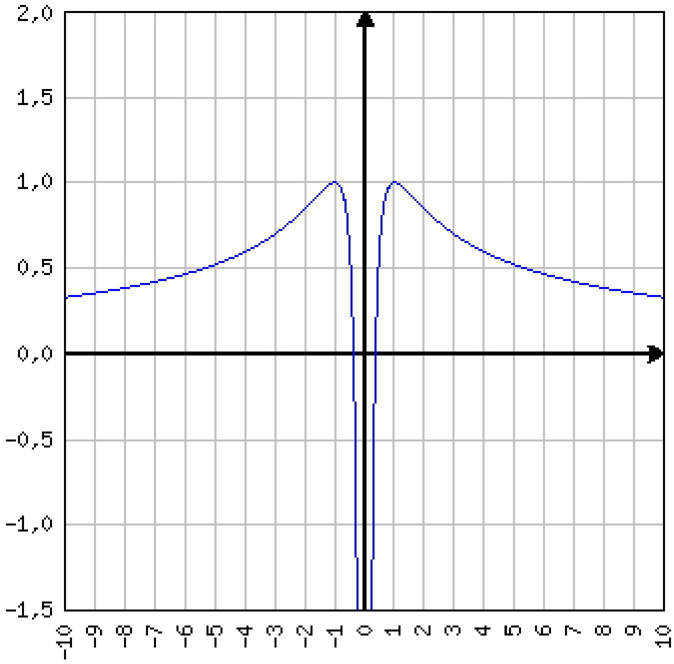
$$y = \frac{a + b\log|x|}{|x|} \qquad y = \left|\frac{a + b\log(x)}{x}\right|$$

I grafici richiesti si possono trovare a partire dal grafico della curva iniziale facendo alcune considerazioni.

Cominciamo con $y=\frac{1+\log|x|}{|x|}=\begin{cases}\frac{1+\log x}{x} & \text{se } x>0\\ \frac{1+\log(-x)}{(-x)} & \text{se } x<0\end{cases}$

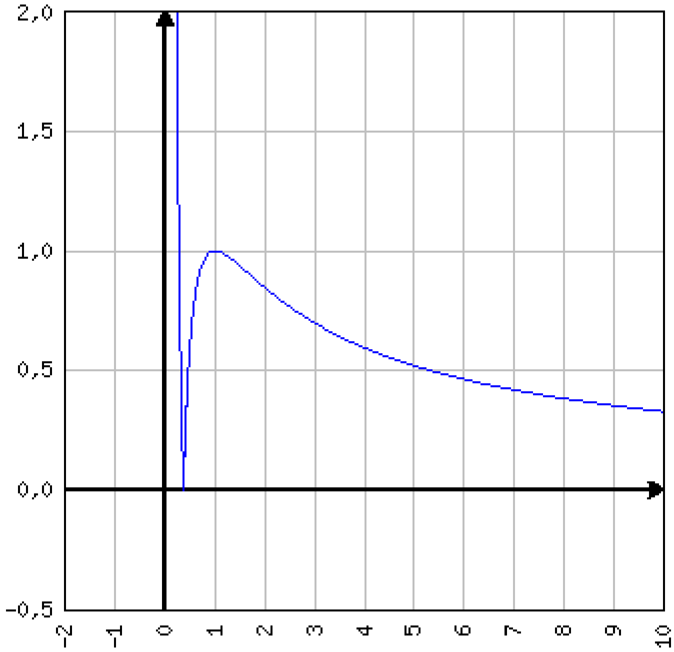
Questa funzione è una funzione pari cioè $y(x)=y(-x)$ per cui il grafico non è altro che il grafico della funzione $y=\frac{1+\log x}{x}$ cui va aggiunta la parte di grafico per x<0 che è il simmetrico del grafico di $y=\frac{1+\log x}{x}$ rispetto all'asse delle ordinate per le considerazioni fatte.

Il grafico è sotto rappresentato:



Vediamo ora il grafico di $y=\left|\frac{1+\log x}{x}\right|=\begin{cases}\frac{1+\log x}{x} & \text{se } y=f(x)\geq 0\\ -\frac{1+\log x}{x} & \text{se } y=f(x)<0\end{cases}$

Ricordando che il valore assoluto rende positivo ciò che è negativo, allora questo grafico lo si ricava dal grafico di $y=\frac{1+\log x}{x}$ lasciando inalterate le parti positive e ribaltando verso le ordinate positive le parti negative, cioè il grafico risulta:


2,0
1,5
1,0
0,5
0,0
-0,5
-2
-1
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10

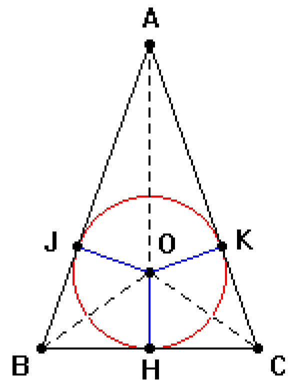
PROBLEMA 2

E’ data la sfera S di centro O e raggio r. Determinare:

Punto 1

il cono C di volume minimo circoscritto a S;

Circoscriviamo ad una data sfera un cono circolare retto e con un piano passante per l'altezza del cono tagliamo entrambi i solidi ricavando la sezione di figura.



Poniamo $\overline{AH} = x$, con $x > 2r$. Con queste assunzioni $\overline{AO} = x - r$ e poiché il triangolo AOK è rettangolo, per il teorema di Pitagora $\overline{AK} = \sqrt{\overline{AO}^2 - \overline{OK}^2} = \sqrt{x \cdot (x - 2r)}$. I triangolo AOK e AHC sono simili per cui $\overline{HC} = \frac{\overline{OK} \cdot \overline{AH}}{\overline{AK}} = \frac{rx}{\sqrt{x \cdot (x - 2r)}}$

Il volume del cono è $V_C(x) = \frac{1}{3}\left(\pi \cdot \overline{HC}^2\right) \cdot \overline{AH} = \frac{\pi}{3} \cdot r^2 \left[\frac{x^2}{(x - 2r)}\right]$ con $x > 2r$. La massimizzazione del volume la effettuiamo attraverso le derivate:

$$V_C^{'}(x) = \frac{\pi}{3} \cdot r^2 \left[\frac{x^2 - 4rx}{(x - 2r)^2}\right]$$

$$V_C^{''}(x) = \frac{\pi}{3} \cdot r^2 \left[\frac{8r^2}{(x - 2r)^3}\right]$$

Si ha:

$$V_C^{'}(x) = \frac{\pi}{3} \cdot r^2 \left[\frac{x^2 - 4rx}{(x - 2r)^2}\right] > 0 \Rightarrow x > \frac{4r}{3} \Rightarrow V_C(x) \text{strettamente crescente in } (4r, +\infty)$$

$$V_C^{'}(x) = \frac{\pi}{3} \cdot r^2 \left[\frac{x^2 - 4rx}{(x - 2r)^2}\right] < 0 \Rightarrow 2r < x < 4r \Rightarrow V_C(x) \text{ strettamente decrescente in } (2r, 4r)$$

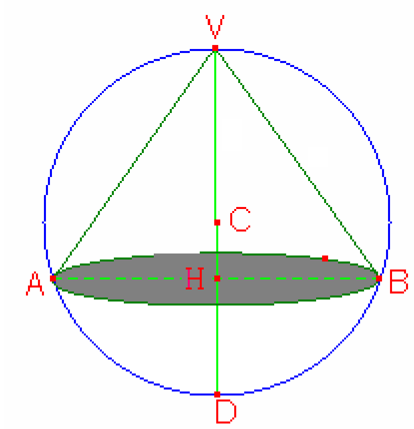
Inoltre $V_C^{''}(x) = \frac{\pi}{3} \cdot r^2 \left[\frac{8r^2}{(x - 2r)^3}\right]_{x=4r} = \frac{\pi r}{3} > 0$, per cui il volume è minimo per $x = 4r$

e vale $V_C(4r)=\frac{\pi}{3}\cdot r^2\left[\frac{(4r)^2}{(4r-2r)}\right]=\frac{8\pi r^3}{3}$.

Punto 2

il cono C' di volume massimo inscritto in S;

Consideriamo la figura sottostante rappresentante la sezione di un cono inscritto in una sfera:



Poniamo $\overline{VH}=x$, con $0<x<2r$. Con queste assunzioni $\overline{HD}=2r-x$ e poiché il triangolo VDB è rettangolo in quanto inscritto in una semicirconferenza, per il teorema di Euclide $\overline{HB}^2=\overline{VH}\cdot\overline{HD}=x\cdot(2r-x)$. Il volume del cono è $V_{C'}(x)=\frac{1}{3}\left(\pi\cdot\overline{HB}^2\right)\cdot\overline{VH}=\frac{\pi}{3}\cdot\left[x^2\cdot(2r-x)\right]$ con $0<x<2r$. La massimizzazione del volume la effettuiamo attraverso le derivate:

$$V'_{C'}(x)=\frac{\pi}{3}\cdot\left[4rx-3x^2\right]$$

$$V''_{C'}(x)=\frac{\pi}{3}\cdot[4r-6x]$$

Si ha:

$$V'_{C'}(x)=\frac{\pi}{3}\cdot\left[4rx-3x^2\right]>0\Rightarrow 0<x<\frac{4r}{3}\Rightarrow V_{C'}(x)\,\text{strettamente crescente in}\left(0,\frac{4r}{3}\right)$$

$$V'_{C'}(x)=\frac{\pi}{3}\cdot\left[4rx-3x^2\right]<0\Rightarrow \frac{4r}{3}<x<2r\Rightarrow V_{C'}(x)\ \text{strettamente decrescente in}\left(\frac{4r}{3},2r\right)$$

Inoltre $V''_{C'}(x)=\frac{\pi}{3}\cdot[4r-6x]_{x=\frac{4r}{3}}=-\frac{4r\pi}{3}<0$, per cui il volume è massimo per $x=\frac{4r}{3}$

e vale $V_{C'}\left(\frac{4r}{3}\right)=\frac{\pi}{3}\cdot\left[\left(\frac{4r}{3}\right)^2\cdot\left(2r-\frac{4r}{3}\right)\right]=\frac{32\pi r^3}{81}$.

Punto 3

un'approssimazione in litri della capacità complessiva di C e C', posto *r =1 metro*;

Ricordiamo che $1\left[\mathrm{m}^3\right]=1000\left[\mathrm{dm}^3\right]=1000[\mathrm{litri}]$ per cui il volume in litri dei due coni è

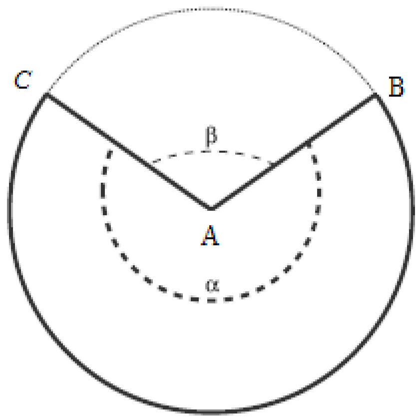
$V_C = \frac{8000\pi}{3}[\text{litri}] \cong 8377.58\,[\text{litri}]$

$V_{C'} = \frac{32000\pi}{81}[\text{litri}] \cong 1241.12\,[\text{litri}]$

Punto 4

la misura, in gradi sessagesimali, dell'angolo del settore circolare sviluppo della superficie laterale del cono C;

Lo sviluppo piano della superficie laterale del cono determina il settore circolare di raggio pari all'apotema del cono $\overline{AC} = \sqrt{\overline{AH}^2 + \overline{HC}^2} = \sqrt{(4r)^2 + (r\sqrt{2})^2} = 3r\sqrt{2}$ rappresentato in figura.



La lunghezza dell'arco BC è pari alla misura della circonferenza della base del cono $2\pi \cdot \overline{HC} = 2\pi r\sqrt{2}$, pertanto la misura in gradi sessagesimali è $\alpha = \frac{2\pi r\sqrt{2}}{3r\sqrt{2}} = \frac{2\pi}{3} = 120°$.

Punto 5

la misura approssimata, in gradi sessagesimali, dell'angolo di semiapertura del cono C applicando uno dei metodi numerici studiati.

L'angolo di semiapertura del cono è tale per cui $x = H\hat{A}C = \arcsin\left(\frac{\overline{HC}}{\overline{AC}}\right) = \arcsin\left(\frac{1}{3}\right)$. Quindi la misura dell'angolo si ricava dalla soluzione dell'equazione $\sin x = \frac{1}{3}$ con $x \in (0°,90°)$. Il problema è equivalente allora a trovare lo zero della funzione $h(x) = \sin x - \frac{1}{3}$ con $x \in (0°,90°)$. Nell'intervallo $x \in (0°,90°)$ la funzione $h(x) = \sin x - \frac{1}{3}$ è strettamente crescente ed inoltre $h(0°) = -\frac{1}{3} < 0, h(30°) = \frac{1}{6} > 0$ per cui la soluzione da calcolare si trova nell'intervallo $(0°,30°)$ a norma del teorema degli zeri. Lo zero cercato, a meno di un centesimo di grado, lo troviamo tramite il metodo di bisezione, il cui sviluppo è mostrato in forma tabellare:

a	b	$\frac{a+b}{2}$	$h(a)$	$h(b)$	$h\left(\frac{a+b}{2}\right)$	$b-a$
0°	30°	15°	-0,3333	0,1667	-0,0745	30°
15°	30°	22,5°	-0,0745	0,1667	0,0493	15°
15°	22,5°	18,75°	-0,0745	0,0493	-0,0119	7,5°
18,75°	22,5°	20.625°	-0,0119	0,0493	0,0189	3,75°
18,75°	20.625°	19,6875°	-0,0119	0,0189	0.0035	1.875°
18,75°	19,6875°	19,21875°	-0,0119	0.0035	-0,0041	0,9375°
19,21875°	19,6875°	19,453125°	-0,0041	0.0035	-0,0029	0,46875°
19,453125°	19,6875°	19,5703125°	-0,0029	0.0035	0,0016	0,234375°
19,453125°	19,5703125°	19,51171875°	-0,0029	0,0016	0.00067	0,1171875°
19,453125°	19,51171875°	19,482421875°	-0,0029	0.00067	0.00018	0,05859375°
19,453125°	19,482421875°	19,46777344°	-0,0029	0.00018	-0.00006	0,029296875°
19,46777344°	19,482421875°	19,47509766°	-0.00006	0.00018	0.00006	0,0146484375°
19,46777344°	19,47509766°	**19,47143555°**	-0.00006	0.00006	0.00003	**0,00732121875°**
19,46777344°	**19,47143555°**					

Dalla tabella soprastante si evince che a meno di un centesimo di grado, la soluzione dell'equazione $\sin x = \frac{1}{3}$ è 19,47143555°.

QUESTIONARIO

Quesito 1

Da un'urna contenente 90 palline numerate se ne estraggono quattro senza reimbussolamento. Supponendo che l'ordine in cui i numeri vengono estratti sia irrilevante, come è nel gioco dell'Enalotto, si calcoli la probabilità che esca la quaterna (7, 47, 67, 87).

Il numero di quaterne è dato dal coefficiente binomiale $C_{90,4} = \binom{90}{4} = \frac{90!}{4! \cdot 86!} = 2555190$. Per cui la probabilità che esca la quaterna (7, 47, 67, 87) è $p = \frac{1}{C_{90,4}} = \frac{1}{2555190} = 3{,}91 \cdot 10^{-7}$.

Quesito 2

Calcolare la probabilità che in dieci lanci di una moneta non truccata dal quinto lancio in poi esca sempre testa.

La probabilità che in un lancio esca testa o croce è la stessa $p(T) = p(C) = \frac{1}{2}$, per cui il risultato dei primi 4 lanci non condiziona il risultato dal quinto al decimo lancio. Per cui, poiché dal quinto al decimo i lanci sono 6, la probabilità richiesta è $p = \left(\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{1}{64}$.

Quesito 3

Calcolare la derivata rispetto a x della funzione

$$\int_x^b f(t)dt$$

ove *f(x)* è una funzione continua.

Per la proprietà degli integrali $\int_x^b f(t)dt = -\int_b^x f(t)dt$. Per il teorema di derivazione della funzione integrale, si ha $\frac{d}{dx}\left(\int_x^b f(t)dt\right) = -\frac{d}{dx}\left(\int_b^x f(t)dt\right) = -\frac{d(x)}{dx} \cdot [f(t)]_{t=x} = -f(x)$.

Quesito 4

Calcolare:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\int_0^x \sin(t^3)dt}{x^4}$$

Il limite si presenta nella forma $\frac{0}{0}$ e siamo nelle ipotesi di poter applicare il teorema di de l'Hopital. Per il teorema di derivazione della funzione integrale, si ha

$\frac{d}{dx}\left(\int_0^x \sin(t^3)dt\right)\frac{d(x)}{dx}\cdot\left[\sin(t^3)\right]_{t=x} = \sin(x^3)$, per cui applicando de l'Hopital si ha $\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x \sin(t^3)dt}{x^4} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin(x^3)}{4x^3} = \frac{1}{4}\underbrace{\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x^3)}{x^3}}_{=1} = \frac{1}{4}$.

Quesito 5

Utilizzando il teorema di Rolle provare che tra due radici reali di $e^x \sin x = 1$ **c'è almeno una radice reale di** $e^x \cos x = -1$**.**

Siano a,b due soluzioni di $e^x \sin x = 1$. L'equazione $e^x \sin x = 1$ è equivalente a $\sin x = e^{-x}$; consideriamo $h(x) = \sin x - e^{-x}$. Si ha $h(a) = h(b) = 0$ ed inoltre $h(x) = \sin x - e^{-x}$ soddisfa le ipotesi del teorema di Rolle, per cui $\exists c \in (a,b) \mid h'(c) = 0$. La derivata prima di $h(x) = \sin x - e^{-x}$ è $h'(x) = \cos x + e^{-x}$ per cui a norma del teorema di Rolle $h'(c) = \cos c + e^{-c} = 0$ da cui $e^c \cos c = -1$ cioè c è soluzione di $e^x \cos x = -1$.

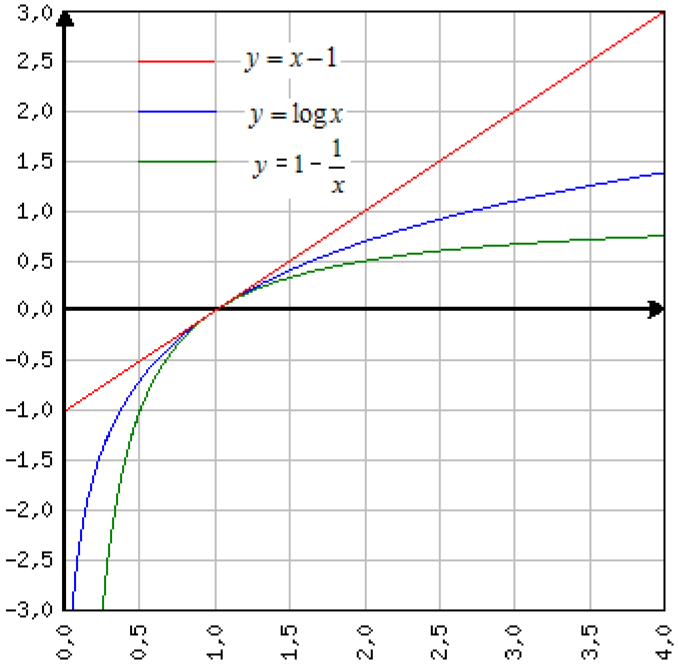
Quesito 6

Applicando il teorema di Lagrange all'intervallo di estremi 1 e x, provare che:

$$1 - \frac{1}{x} < \log x < x - 1$$

e dare del risultato un'interpretazione grafica.

Consideriamo la funzione $f(t) = \log(t)$ con $t \in [1, x]$. E' possibile applicare il teorema di Lagrange e si ha che $\exists c \in (1, x) \mid f'(c) = \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$ cioè $\frac{1}{c} = \frac{\log x}{x - 1}$. Poiché $1 < c < x \Rightarrow \frac{1}{x} < \frac{1}{c} < 1$ per cui $\frac{1}{x} < \frac{\log x}{x - 1} < 1$. Poiché $x > 1$, moltiplicando la disuguaglianza per $(x-1)$ si ha $1 - \frac{1}{x} < \log x < x - 1$ come volevasi dimostrare. La retta $y = x - 1$ è la tangente sia alla curva $y = \log x$ che alla funzione omografica $y = 1 - \frac{1}{x}$ nel punto di ascissa 1. Geometricamente la disuguaglianza $1 - \frac{1}{x} < \log x < x - 1$ esprime il fatto che il grafico della curva $y = \log x$ si trova tra il grafico della retta e quello del ramo di iperbole. Il grafico sottostante evidenzia l'interpretazione geometrica del risultato ottenuto.



Quesito 7

Verificare che la funzione:

$$y = \frac{1 - e^{1-x}}{1 + e^{1-x}}$$

è invertibile e detta *g* la funzione inversa, calcolare $g'(0)$**.**

La funzione $y = \frac{1 - e^{1-x}}{1 + e^{1-x}}$ è definita e continua in tutto R. La sua derivata è $y' = \frac{e^{1-x}(1 + e^{1-x}) - (1 - e^{1-x})(-e^{1-x})}{(1 + e^{1-x})^2} = \frac{2(e^{1-x})^2}{(1 + e^{1-x})^2}$ per cui la funzione è strettamente crescente in tutto R. Quindi è invertibile. Per il teorema della derivata dalla funzione inversa, detta $g(y)$ l'inversa di $y = \frac{1 - e^{1-x}}{1 + e^{1-x}}$, la derivata di $g(y)$ è $g'(y) = \frac{1}{f'(x)}$. Ora a $y = 0$ corrisponde $x = 1$ per cui

$$g'(0) = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{\left[\frac{2(e^{1-x})^2}{(1 + e^{1-x})^2}\right]_{x=1}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$$

Quesito 8

Con uno dei metodi di quadratura studiati, si valuti l'integrale definito

$$\int_1^3 \frac{\log x}{x}$$

con un errore inferiore a 10^{-4} **.**

Utilizziamo il metodo di Cavalieri Simpson e ricordiamo che l'errore commesso nel calcolo dell'integrale è $\varepsilon \le \frac{(b-a)^5}{180n^4} \cdot \max\left|f^{IV}(x)\right|$. Nel caso in esame la funzione $f(x)=\frac{\log x}{x}$ e la derivata quarta è $f^{IV}(x)=\frac{24\log x-50}{x^5}$ e in [1,3] il massimo del valore assoluto lo si ha in 1 e vale $\max\left|f^{IV}(x)\right| = \max\left|\frac{24\log x-50}{x^5}\right| = 50$ per cui l'errore commesso è $\varepsilon \le \frac{80}{9n^4}$ per cui imponendo $\varepsilon \le \frac{80}{9n^4} < 10^{-4}$ si ricava $n^4 > \frac{80\cdot 10^4}{9} \Rightarrow n > 10\sqrt[4]{\frac{80}{9}} \cong 17.26$. Scegliamo allora $n=18$ e suddividiamo l'intervallo [1,3] in 18 sotto intervalli di ampiezza $\frac{b-a}{18}=\frac{1}{9}$. L'integrale, numericamente, sarà:

$$\int_1^3 \frac{\log x}{x}dx \cong \left(\frac{b-a}{n}\right)\cdot\left\{\left[\frac{g(x_0)+g(x_{18})}{3}\right]+\frac{4}{3}\cdot\sum_{h=0}^{8} g(x_{2h+1})+\frac{2}{3}\cdot\sum_{h=0}^{7} g(x_{2h+2})\right\} \cong 0.60346$$

Il valore esatto dell'integrale è $\int_1^3 \frac{\log x}{x}dx = \left[\frac{\log^2 x}{2}\right]_1^3 = \frac{\log^2 3}{2} \cong 0.6034744$ che differisce da 0.60346 per meno di 10^{-4}.

Quesito 9

Verificato che l'equazione $\cos x - \log x = 0$ ammette una sola radice positiva compresa tra 1 e 2 se ne calcoli un'approssimazione applicando uno dei metodi numerici studiati.

Consideriamo la funzione $h(x)=\cos x - \log x$. Essa è continua in [1,2] ed ha derivata $h'(x) = -\sin x - \frac{1}{x}$ per cui in [1,2] $h(x)=\cos x - \log x$ è strettamente decrescente. Inoltre $h(1)>0, h(2)<0$ per cui per il teorema degli zeri esiste un'unica radice in [1,2]

Lo zero cercato, a meno di un decimo, lo troviamo tramite il metodo di bisezione, il cui sviluppo è mostrato in forma tabellare:

a	b	$\frac{a+b}{2}$	$h(a)$	$h(b)$	$h\left(\frac{a+b}{2}\right)$	$b-a$
1	2	1,5	0,540	-1,109	-0,335	1
1	1,5	1,25	0,540	-0,335	0,092	0,5
1,25	1,5	1,375	0,092	-0,335	-0,124	0,25
1,25	1,375	1,3125	0,092	-0,124	-0,0165	0,125
1,25	1,3125	**1,28125**	0,092	-0,0165	0,0377	**0,0625**
1,28125	**1,3125**					

Dalla tabella soprastante si evince che a meno di un centesimo di grado, la soluzione dell'equazione $h(x) = \cos x - \log x = 0$ è 1,28125.

Quesito 10

Chiarire, con esempi appropriati, la differenza in matematica tra "*concetto primitivo*" e "*assioma*".

Un concetto primitivo è un "oggetto" che non viene definito ma viene accettato come noto. Ad esempio concetti o enti primitivi nella geometria euclidea sono il punto e la retta. Gli assiomi o postulati sono delle proposizioni che non si dimostrano, accettate come vere, e che stabiliscono relazioni tra gli enti primitivi: cioè gli assiomi chiariscono le proprietà di base dei concetti primitivi. Nella geometria euclidea la proposizione per cui data una retta ed un punto P non appartenente ad essa, esiste un'unica retta parallela ad essa e passante per P è un assioma.