ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO

CORSO SPERIMENTALE PNI

Tema di: **MATEMATICA**

a. s. 2002-2003

Il candidato risolva uno dei due problemi e 5 dei 10 quesiti del questionario.

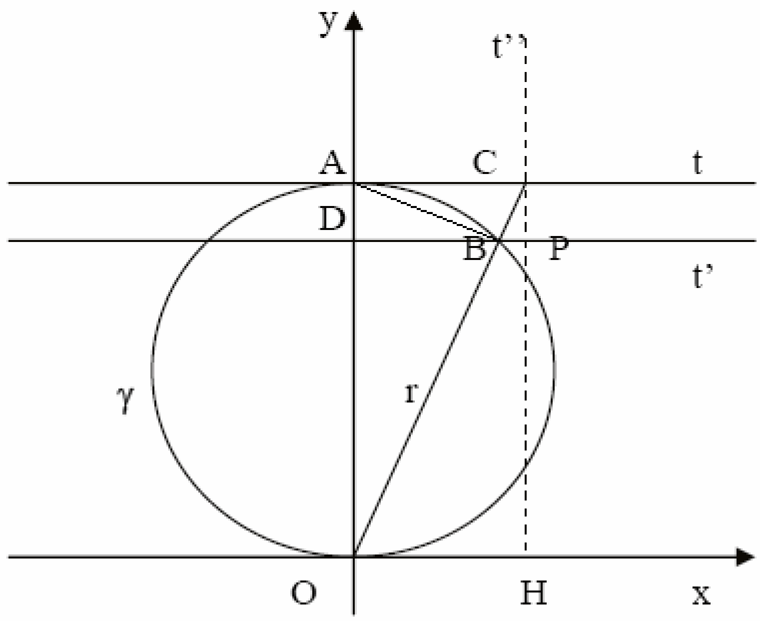
PROBLEMA 1

Nel piano sono dati: il cerchio γ di diametro $OA = a$, la retta t tangente a γ in A, una retta r passante per O, il punto B, ulteriore intersezione di r con γ, il punto C intersezione di r con t.
La parallela per B a t e la perpendicolare per C a t s'intersecano in P. Al variare di r, P descrive il luogo geometrico Γ noto con il nome di versiera di Agnesi [da *Maria Gaetana Agnesi*, matematica milanese, (1718-1799)].

1. Si provi che valgono le seguenti proporzioni:
$$OD : DB = OA : DP$$
$$OC : DP = DP : BC$$
ove D è la proiezione ortogonale di B su OA.
2. Si verifichi che, con una opportuna scelta del sistema di coordinate cartesiane ortogonali e monometriche Oxy, l'equazione cartesiana di Γ è: $y = \frac{a^3}{x^2 + a^2}$.
3. Si tracci il grafico di Γ e si provi che l'area compresa fra Γ e il suo asintoto è quattro volte quella del cerchio γ.

Soluzione

Si consideri la figura sottostante che evidenzia la geometria del problema:



1)

I triangoli DOB e AOC sono simili, essendo entrambi rettangoli ed avendo l'angolo $D\hat{O}B$ in comune; per cui vale la seguente proporzione tra i lati:

$$OD : DB = OA : AC$$

Ma $AC = DP$ per cui la proporzione diventa:

$$OD : DB = OA : DP \, .$$

Il triangolo ABO è inscritto in una semicirconferenza per cui $AB \perp OB$. I triangoli ABC ed AOC sono simili in quanto rettangoli ed avendo l'angolo $A\hat{C}B$ in comune, per cui vale la seguente proporzione tra i lati:

$$OC : AC = AC : BC$$

Ma $AC = DP$ per cui la proporzione diventa:

$$OC : DP = DP : BC \, .$$

Un differente modo per provare la seguente proporzione è sfruttare il teorema di Euclide al triangolo AOC, per cui $AC^2 = OC \cdot BC \overset{AC=DP}{\Leftrightarrow} DP^2 = OC \cdot BC \Leftrightarrow OC : DP = DP : BC$.

2)

La retta r ha equazione generica $r : y = mx$. La retta t ha equazione $t : y = a$, per cui il punto C ha coordinate date dall'intersezione delle rette $r : y = mx$ e $t : y = a$, cioè $C = \left(\frac{a}{m}, a\right)$.

L'equazione della circonferenza di raggio $\frac{a}{2}$ e centro in $\left(0, \frac{a}{2}\right)$ per come scelto il sistema di riferimento è:

$$\gamma : (x-0)^2 + \left(y - \frac{a}{2}\right)^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - ay = 0$$

Il punto B ha coordinate date dalla risoluzione del seguente sistema:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - ay = 0 \\ y = mx \end{cases} \Leftrightarrow x^2 + m^2x^2 - amx = 0 \Leftrightarrow x\left[x\left(1+m^2\right) - am\right] = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0, x_2 = \frac{am}{\left(1+m^2\right)}$$

ed escludendo la soluzione nulla si ha:

$$B = \left(\frac{am}{\left(1+m^2\right)}, \frac{am^2}{\left(1+m^2\right)}\right)$$

Ora il punto P ha la stessa ascissa del punto C e la stessa ordinata di B, per cui

$$P = \left(\frac{a}{m}, \frac{am^2}{\left(1+m^2\right)}\right)$$

Ora posto:

$$\begin{cases} x = \dfrac{a}{m} \\ y = \dfrac{am^2}{\left(1+m^2\right)} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = \dfrac{a}{x} \\ y = \dfrac{am^2}{\left(1+m^2\right)} \end{cases}$$

da cui sostituendo la prima nella seconda si ottiene il luogo desiderato:

$$\Gamma : y = \frac{a\left(\frac{a}{x}\right)^2}{1+\left(\frac{a}{x}\right)^2} = \frac{a^3}{a^2+x^2}$$

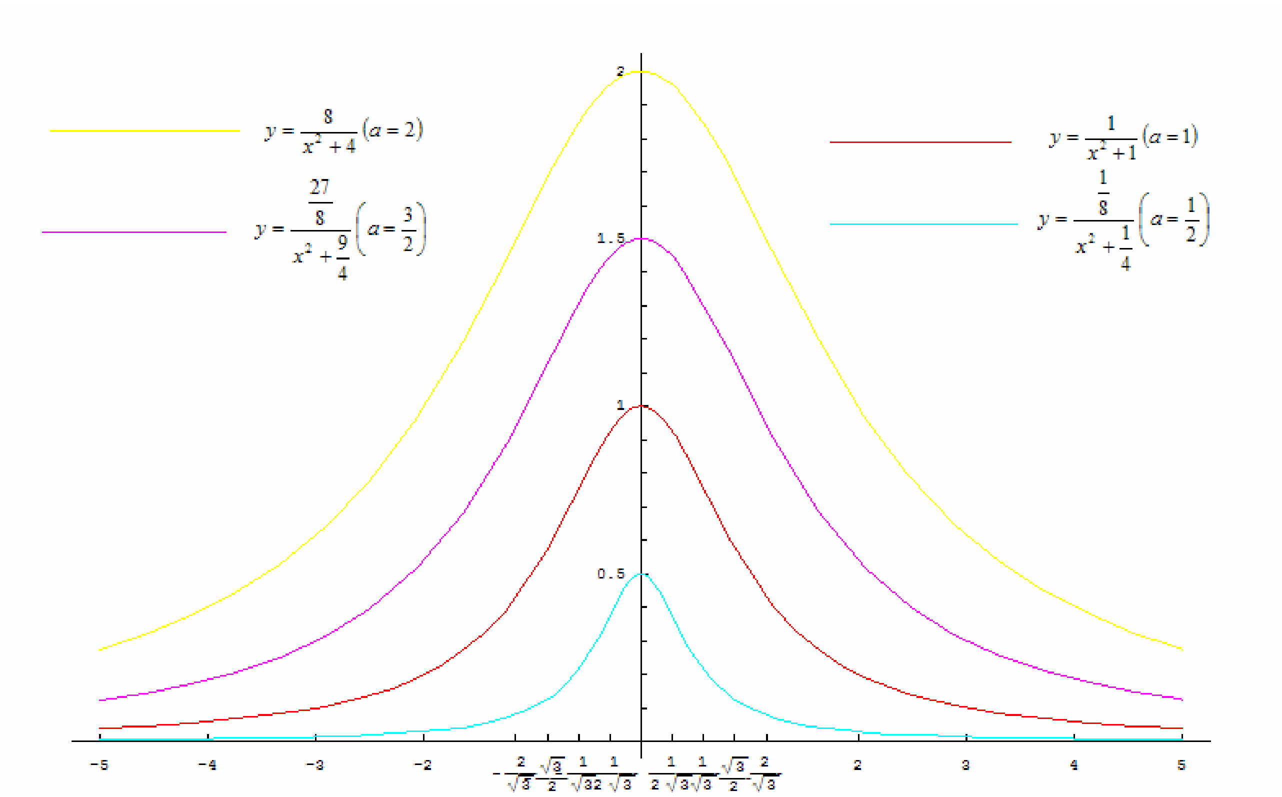
3)

Studiamo la funzione $\Gamma : y = \dfrac{a^3}{a^2+x^2}$

- **Dominio**: la funzione è definito in tutto $R \equiv (-\infty,+\infty)$;
- **Intersezioni asse delle ascisse**: non ce ne sono;
- **Intersezione asse delle ordinate**: non ce ne sono;
- **Eventuali simmetrie**: la funzione è pari; infatti $y(-x) = \dfrac{a^3}{a^2+(-x)^2} = \dfrac{a^3}{a^2+x^2} = y(x)$;
- **Positività**: la funzione è sempre positiva per come definita;
- **Asintoti verticali**: non ce ne sono visto che la funzione è continua e definita in tutto $R \equiv (-\infty,+\infty)$;
- **Asintoti orizzontali**: esiste ed è unico, coincidente a sinistra ed a destra; infatti $\lim_{x\to\pm\infty} \dfrac{a^3}{a^2+x^2} = 0$. Per cui $y = 0$ è asintoto orizzontale;
- **Asintoti obliqui**: essendo $\Gamma : y = \dfrac{a^3}{a^2+x^2}$ una funzione razionale fratta, la presenza dell'asintoto orizzontale esclude quella dell'obliquo. In altro modo calcolandoci l'asintoto obliquo di equazione $y = mx + q$ troviamo $m = \lim_{x\to\pm\infty} \dfrac{\frac{a^3}{a^2+x^2}}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \dfrac{a^3}{x\left(a^2+x^2\right)} = 0, q = \lim_{x\to\pm\infty}\left[y - mx\right] = \lim_{x\to\pm\infty}\left[y-0\right] = \lim_{x\to\pm\infty} \dfrac{a^3}{\left(a^2+x^2\right)} = 0$ per cui l'asintoto obliquo si riduce all'orizzontale;

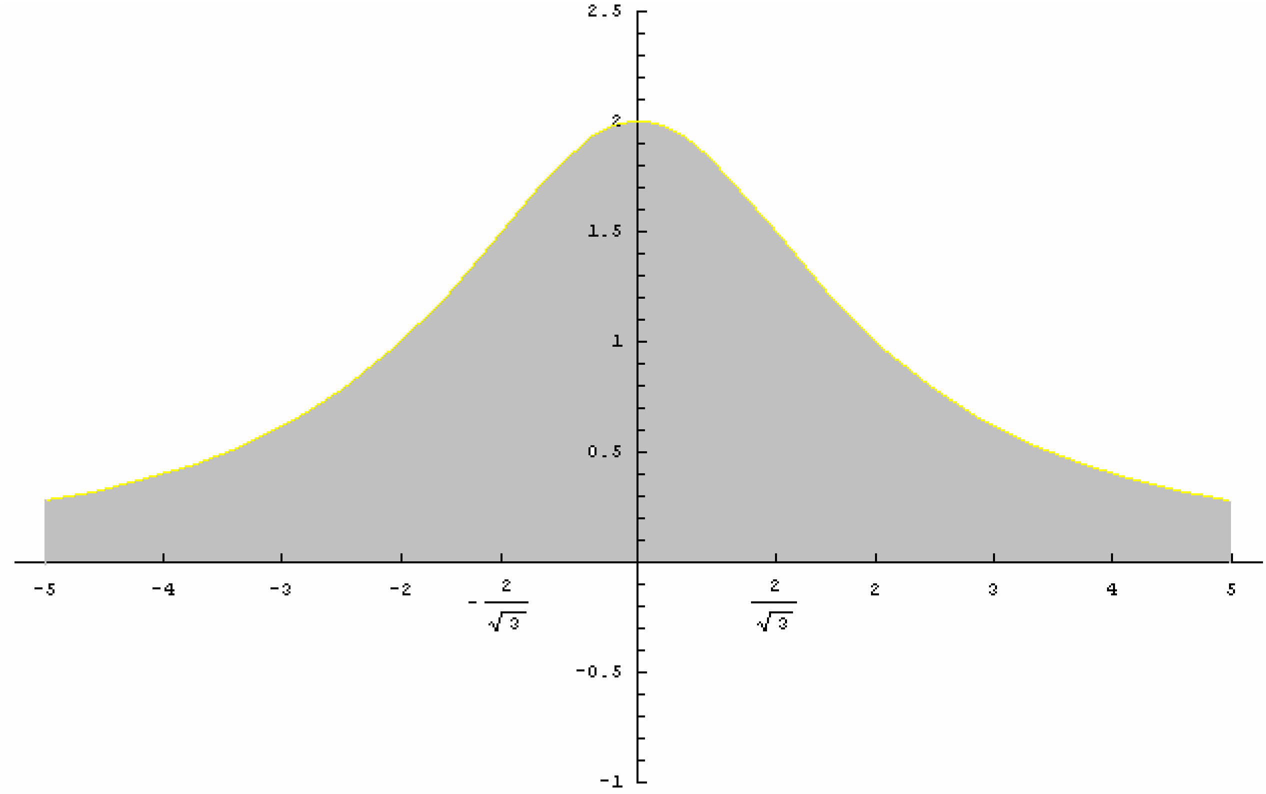
- **Crescenza e decrescenza**: la derivata prima della funzione $\Gamma : y = \frac{a^3}{a^2 + x^2}$ è $y' = \frac{-2a^3 x}{(a^2 + x^2)^2}$ per cui $y' > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, 0)$ cioè la funzione è crescente in $(-\infty, 0)$ e decrescente in $(0, +\infty)$. La derivate seconda, dopo qualche calcolo, sarà pari a $y'' = 2a^3 \frac{3x^2 - a^2}{(a^2 + x^2)^3}$, per cui essendo $y''(0) = -\frac{2}{a} < 0$, il punto $(0, a)$ è di massimo relativo ed assoluto. Inoltre $y'' = 2a^3 \frac{3x^2 - a^2}{(a^2 + x^2)^3} = 0 \Leftrightarrow x = \pm \frac{a}{\sqrt{3}}$ per cui i punti $\left(\frac{a}{\sqrt{3}}, \frac{3}{4}a\right), \left(-\frac{a}{\sqrt{3}}, \frac{3}{4}a\right)$ sono due flessi.

Sotto viene presentata la funzione al variare del parametro a: ovviamente al crescere del parametro a le campane si allargano, il massimo cresce ed i flessi si spostano verso ascisse maggiori quelli positivi e verso ascisse minori quelli negativi.



3)

L'area da calcolare è rappresentata nella figura sottostante in grigio:



Calcoliamo l'area sottesa dal luogo $\Gamma : y = \frac{a^3}{a^2 + x^2}$:

$$A_\Gamma = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{a^3}{a^2 + x^2} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{a}{1 + \left(\frac{x}{a}\right)^2} dx =$$

$$= a^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\frac{1}{a}}{1 + \left(\frac{x}{a}\right)^2} dx = a^2 \left[\arctan\left(\frac{x}{a}\right) \right]_{-\infty}^{+\infty} =$$

$$= a^2 [\arctan(+\infty) - \arctan(-\infty)] = a^2 \left[\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2} \right) \right] = \pi a^2$$

L'area del cerchio di raggio $\frac{a}{2}$ è $A_\gamma = \pi \frac{a^2}{4} = \frac{A_\Gamma}{4}$ come volevamo dimostrare.

PROBLEMA 2

Sia $f(x) = a2^x + b2^{-x} + c$ con a, b, c numeri reali. Si determinino a, b, c in modo che:

1. 1. la funzione f sia pari;
   2. $f(0) = 2$;
   3. $\int_0^1 f(x)dx = \frac{3}{2\log 2}$.

2. Si studi la funzione g ottenuta sostituendo ad a, b, c i valori così determinati e se ne disegni il grafico G.

3. Si consideri la retta r di equazione y=4 e si determinino, approssimativamente, le ascisse dei punti in cui essa interseca G, mettendo in atto un procedimento iterativo a scelta.

4. Si calcoli l'area della regione finita del piano racchiusa tra r e G.

5. Si calcoli $\int \frac{1}{g(x)} dx$.

6. Si determini la funzione g' il cui grafico è simmetrico di G rispetto alla retta r.

Soluzione

1)

Una funzione è pari se $f(x) = f(-x)$, cioè se il grafico è simmetrico rispetto all'asse delle ordinate. Nel caso della funzione in esame la condizione di parità impone

$$f(x) = a2^x + b2^{-x} + c = a2^{-x} + b2^x + c = f(-x) \Leftrightarrow a = b$$

La condizione $f(0) = 2$ implica $a + b + c = 2$, mentre la condizione $\int_0^1 \left(a2^x + b2^{-x} + c\right)dx = \frac{3}{2\ln 2}$ comporta una ulteriore condizione data dalla risoluzione dell'integrale.

Risolviamo allora l'integrale:

$$\int_0^1 \left(a2^x + b2^{-x} + c\right)dx = \left[a\frac{2^x}{\ln 2} - b\frac{2^{-x}}{\ln 2} + cx\right]_0^1 =$$
$$= a\frac{2}{\ln 2} - b\frac{1}{2\ln 2} + c - a\frac{1}{\ln 2} + b\frac{1}{\ln 2} =$$
$$= a\frac{1}{\ln 2} + b\frac{1}{2\ln 2} + c = \left(\frac{2a+b}{2\ln 2}\right) + c$$

Le condizioni da imporre e soddisfare sono allora:

$$\begin{cases} a=b \\ a+b+c=2 \\ \left(\frac{2a+b}{2\ln 2}\right)+c=\frac{3}{2\ln 2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=b \\ c=2-2a \\ \left(\frac{3a}{2\ln 2}\right)+2-2a=\frac{3}{2\ln 2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=b \\ c=2-2a \\ a(3-4\ln 2)=3-4\ln 2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=1 \\ c=0 \end{cases}$$

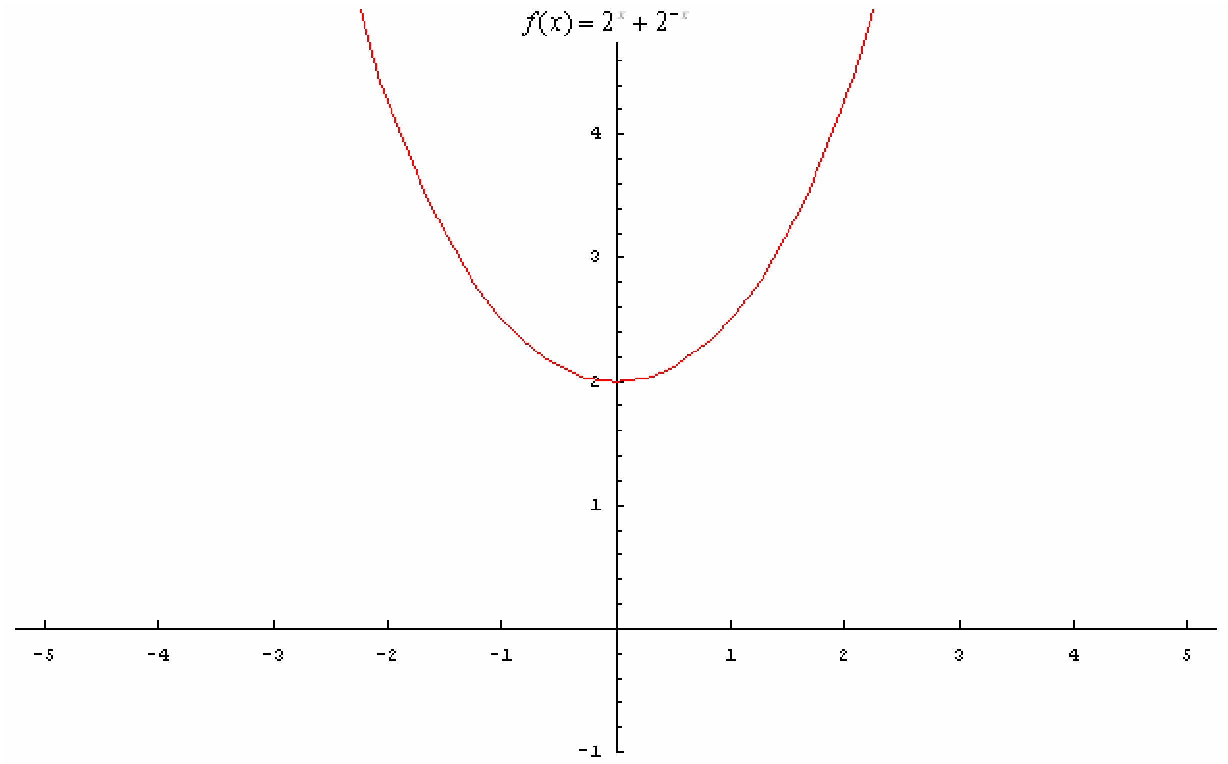
La funzione richiesta è allora: $f(x)=2^x+2^{-x}$.

2)

Studiamo la funzione $f(x)=2^x+2^{-x}$

- **Dominio**: la funzione è definito in tutto $R\equiv(-\infty,+\infty)$;
- **Intersezioni asse delle ascisse**: non ce ne sono;
- **Intersezione asse delle ordinate**: $x=0\Rightarrow y=2$;
- **Eventuali simmetrie**: la funzione è pari per ipotesi;
- **Positività**: la funzione è sempre positiva per come definita;
- **Asintoti verticali**: non ce ne sono visto che la funzione è continua e definita in tutto $R\equiv(-\infty,+\infty)$;
- **Asintoti orizzontali**: non esistono; infatti $\lim_{x\to\pm\infty}\left(2^x+2^{-x}\right)=+\infty$.
- **Asintoti obliqui**: non esistono; infatti calcolandoci l'asintoto obliquo di equazione $y=mx+q$ troviamo $m=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\left(2^x+2^{-x}\right)}{x}\overset{H}{=}\lim_{x\to\pm\infty}\ln 2\left(2^x-2^{-x}\right)=\pm\infty$ per cui l'asintoto obliquo non esiste;
- **Crescenza e decrescenza**: la derivata prima della funzione $f(x)=2^x+2^{-x}$ è $y'=\ln 2\left(2^x-2^{-x}\right)$ per cui $y'>0\Leftrightarrow 2^x>2^{-x}\Leftrightarrow x>-x\Leftrightarrow x>0$ cioè la funzione è crescente in $(0,+\infty)$ e decrescente in $(-\infty,0)$. La derivate seconda sarà pari a $y''=(\ln 2)^2\left(2^x+2^{-x}\right)>0\ \forall x\in R$, per cui essendo $y''(0)=2(\ln 2)^2>0$, il punto $(0,2)$ è di minimo relativo ed assoluto. Inoltre la funzione non presenta flessi.

Il grafico è sotto presentato:

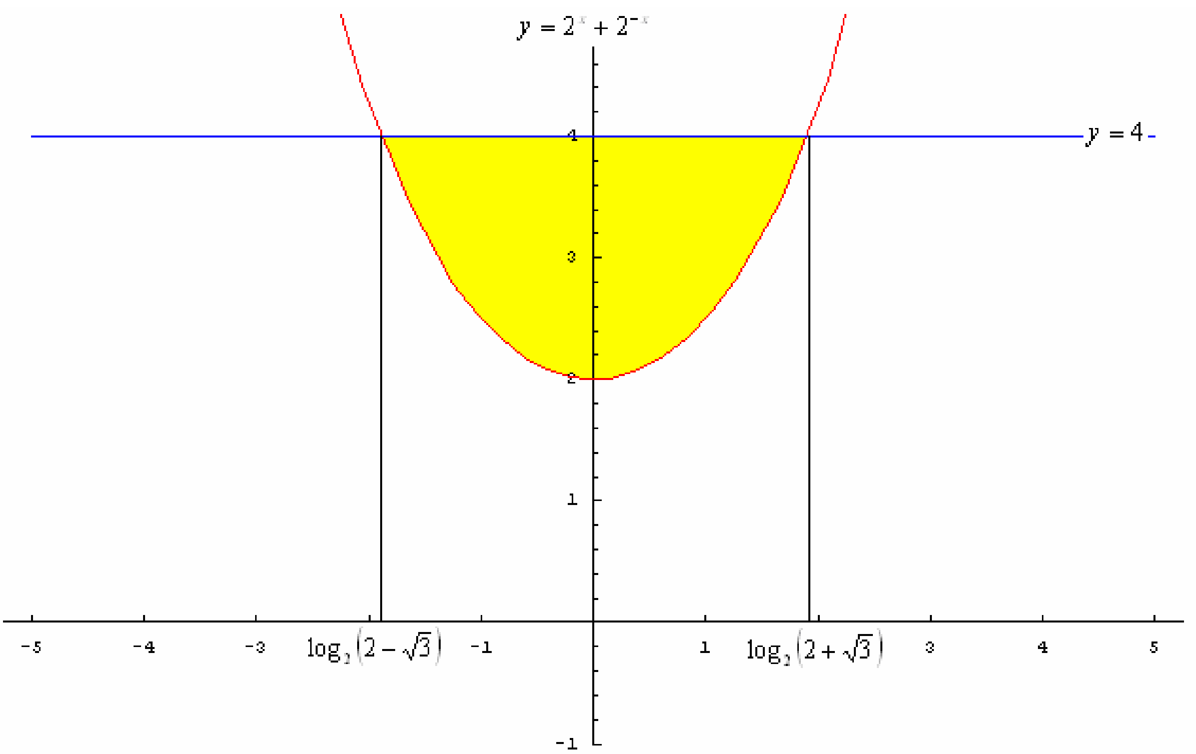


3)

Bisogna calcolare le soluzioni del sistema seguente:

$$\begin{cases} y = 2^x + 2^{-x} \\ y = 4 \end{cases} \Rightarrow 2^x + 2^{-x} = 4 \Rightarrow 2^{2x} - 4 \cdot 2^x + 1 = 0 \Rightarrow$$

$$2^x = 2 \pm \sqrt{3} \Rightarrow x_{\pm} = \log_2\left(2 \pm \sqrt{3}\right)$$



Le due soluzioni, vista la simmetria pari della funzione $f(x)=2^x+2^{-x}$, saranno anch'essi simmetrici rispetto all'asse delle ordinate. Per cui trovata una soluzione, per simmetria si conosce anche l'altra.

Un metodo iterativo a scelta è il metodo di bisezione. Per poterlo applicare bisogna prima stabilire l'intervallo in cui applicarlo. La funzione $2^{(\cdot)}$ è una funzione monotona crescente per cui $x_1<x<x_2 \Rightarrow 2^{(x_1)}<2^{(x)}<2^{(x_2)}$; nel caso in particolare, essendo $2<2+\sqrt{3}<4$ si ha $2<2+\sqrt{3}<4 \Leftrightarrow 2^1<2^{\log_2\left(2+\sqrt{3}\right)}<2^2 \Leftrightarrow 1<\log_2\left(2+\sqrt{3}\right)<2$. Quindi la soluzione positiva si trova nell'intervallo [1,2].

Trovato l'intervallo, calcoliamo l'approssimazione della soluzione attraverso il metodo di bisezione già annunciato. Scegliamo come errore di approssimazione $\delta=10^{-3}$, cioè in pratica calcoleremo la radice cercata con 3 cifre significative.

Il procedimento completo è evidenziato nella tabella sottostante in cui ogni riga rappresenta uno step del procedimento:

Estremo inferiore intervallo (inf)	**Estremo superiore intervallo (sup)**	**Centro Intervallo (inf+sup)/2**	**Valore di** $2^{\inf}$	**Valore di** $2^{\sup}$	**Valore di** $2^{\frac{\inf+\sup}{2}}$	**Valore di** $2^{\log_2\left(2+\sqrt{3}\right)}$	**Errore commesso:** $\varepsilon=\sup-\inf$
1	2	3/2	2	4	2.82843	3.73205	1
3/2	2	7/4	2.82843	4	3.36359	3.73205	0.5
7/4	2	15/8	3.36359	4	3.66802	3.73205	0.25
15/8	2	31/16	3.66802	4	3.83041	3.73205	0.125
15/8	31/16	61/32	3.66802	3.83041	3.74834	3.73205	0.0625
15/8	61/32	121/64	3.66802	3.74834	3.70796	3.73205	0.03125
121/64	61/32	243/128	3.70796	3.74834	3.72809	3.73205	0.015625
243/128	61/32	487/256	3.72809	3.74834	3.7382	3.73205	0.0078125
243/128	487/256	973/512	3.72809	3.7382	3.73314	3.73205	0.00390625
243/128	973/512	1945/1024	3.72809	3.73314	3.73062	3.73205	0.001953125
1945/1024	973/512	3891/2048	3.73062	3.73314	3.73188	3.73205	0.0009765625
3891/2048	**973/512**	-	3.73188	3.73314	-	3.73205	STOP

Quindi $1.8999 \approx \frac{3891}{2048} < x = \log_2\left(2+\sqrt{3}\right) < \frac{973}{512} \approx 1.90039$. Analogamente $-1.90039 \approx -\frac{973}{512} < x = \log_2\left(2-\sqrt{3}\right) < -\frac{3891}{2048} \approx -1.8999$.

4)

L'area richiesta è raffigurata in giallo nella figura precedente ed è pari a:

$$A = \int_{\log_2(2-\sqrt{3})}^{\log_2(2+\sqrt{3})} \left[4 - 2^x - 2^{-x}\right] dx \overset{\substack{simmetria \\ pari}}{=} 2 \int_{0}^{\log_2(2+\sqrt{3})} \left[4 - 2^x - 2^{-x}\right] dx = 2\left[4x - \left(\frac{2^x - 2^{-x}}{\ln 2}\right)\right]_0^{\log_2(2+\sqrt{3})} =$$

$$= 2\left[4\log_2\left(2+\sqrt{3}\right) - \left(\frac{2^{\log_2(2+\sqrt{3})} - 2^{-\log_2(2+\sqrt{3})}}{\ln 2}\right)\right] - 2\left[0 - \left(\frac{2^0 - 2^0}{\ln 2}\right)\right] =$$

$$= 2\left[4\log_2\left(2+\sqrt{3}\right) - \left(\frac{\left(2+\sqrt{3}\right) - \frac{1}{\left(2+\sqrt{3}\right)}}{\ln 2}\right)\right] = 2\left[4\log_2\left(2+\sqrt{3}\right) - \frac{\left(2+\sqrt{3}\right)^2 - 1}{\left(2+\sqrt{3}\right)\ln 2}\right] =$$

$$2\left[4\log_2\left(2+\sqrt{3}\right) - \frac{6+4\sqrt{3}}{\left(2+\sqrt{3}\right)\ln 2}\right] = 2\left[4\log_2\left(2+\sqrt{3}\right) - \frac{\left(6+4\sqrt{3}\right)\left(2-\sqrt{3}\right)}{\ln 2}\right] =$$

$$= 8\log_2\left(2+\sqrt{3}\right) - \frac{4\sqrt{3}}{\ln 2}$$

5)

$$I = \int \frac{1}{2^x + 2^{-x}} dx = \int \frac{2^x}{2^{2x}+1} dx = \int \frac{2^x}{\left(2^x\right)^2 + 1} dx = \frac{1}{\ln 2}\int \frac{\ln 2 \cdot 2^x}{\left(2^x\right)^2+1} dx =$$

$$= \frac{1}{\ln 2}\int \frac{d\left(2^x\right)}{\left(2^x\right)^2 + 1} = \frac{\arctan\left(2^x\right)}{\ln 2} + k$$

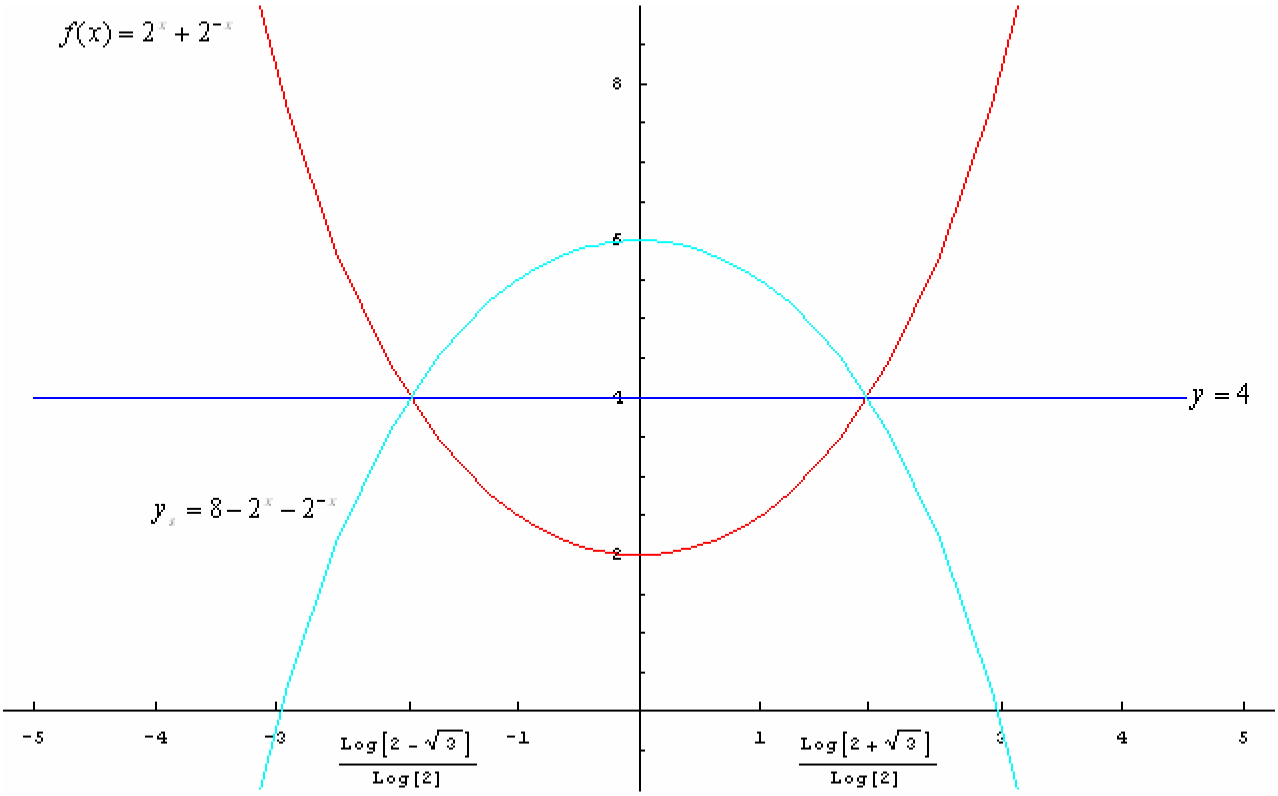
6)

La funzione simmetrica della $f(x) = 2^x + 2^{-x}$ rispetto alla retta di equazione $y = 4$ la si ricava dalla trasformazione seguente:

$$\begin{cases} x' = x \\ \frac{y+y'}{2} = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = x \\ y' = 8 - y \end{cases} \overset{y=2^x+2^{-x}}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x' = x \\ y' = 8 - 2^{x'} - 2^{-x'} \end{cases}$$

per cui ritornando alle variabili solite (x, y) la simmetrica ha equazione $y_s = 8 - 2^x - 2^{-x}$

Sotto in un unico sistema di riferimento vengono mostrate la curva di partenza $f(x) = 2^x + 2^{-x}$, la sua simmetrica $y_s = 8 - 2^x - 2^{-x}$ e la retta $y = 4$:



$f(x) = 2^x + 2^{-x}$
$y_s = 8 - 2^x - 2^{-x}$
$y = 4$
8
6
4
2
-5
-4
-3
Log[2 - √3] / Log[2]
-1
1
Log[2 + √3] / Log[2]
3
4
5

QUESTIONARIO

1. Quante partite di calcio della serie A vengono disputate complessivamente (andata e ritorno) nel campionato italiano a 18 squadre?
2. Tre scatole A, B e C contengono lampade prodotte da una certa fabbrica di cui alcune difettose. A contiene 2000 lampade con il 5% di esse difettose, B ne contiene 500 con il 20% difettose e C ne contiene 1000 con il 10% difettose.
   Si sceglie una scatola a caso e si estrae a caso una lampada. Qual è la probabilità che essa sia difettosa?
3. Qual è la capacità massima, espressa in centilitri, di un cono di apotema 2 dm?
4. Dare un esempio di polinomio P(x) il cui grafico tagli la retta y=2 quattro volte.
5. Dimostrare, usando il teorema di Rolle [da Michel Rolle, matematico francese, (1652-1719)], che se l'equazione:
   $$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots\dots\dots + a_1 x + a_0 = 0$$
   ammette radici reali, allora fra due di esse giace almeno una radice dell'equazione:
   $$nx^{n-1} + (n-1)a_{n-1}x^{n-2} + \dots\dots\dots + a_1 = 0$$
6. Si vuole che l'equazione $x^3 + bx - 7 = 0$ abbia tre radici reali. Qual è un possibile valore di b?
7. Verificare l'uguaglianza
   $$\pi = 4\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx$$
   e utilizzarla per calcolare un'approssimazione di π, applicando un metodo di integrazione numerica.
8. Dare un esempio di solido il cui volume è dato da $\int_0^1 \pi x^3 dx$.
9. Di una funzione f(x) si sa che ha derivata seconda uguale a *senx* e che $f'(0) = 1$.
   Quanto vale $f\left(\frac{\pi}{2}\right) - f(0)$?
10. Verificare che l'equazione $x^3 - 3x + 1 = 0$ ammette tre radici reali. Di una di esse, quella compresa tra 0 e 1, se ne calcoli un'approssimazione applicando uno dei metodi numerici studiati.

Soluzione

1)

Consideriamo solo un girone, ad esempio quello di andata. Ogni partita coinvolge 2 squadre su 18, per cui in un girone si giocano $D_{18,2} = \binom{18}{2} = \frac{18!}{2!\cdot 16!} = \frac{17\cdot 18}{2} = 153$ partite. Considerando pure il ritorno si avranno in un intero campionato un numero di partite pari a $2\cdot D_{18,2} = 153\cdot 2 = 306$.

Intuitivamente ogni giornata di campionato coinvolge 9 partite, ogni girone è di 17 partite per cui le giornate di campionato in un campionato a 18 squadre sono $9\cdot 17\cdot 2 = 306$.

2)

Consideriamo i seguenti eventi:

$$
\begin{aligned}
D &= \{\text{lampada difettosa}\} \\
A &= \{\text{lampada difettosa della fabbrica A}\} \\
B &= \{\text{lampada difettosa della fabbrica B}\} \\
C &= \{\text{lampada difettosa della fabbrica C}\}
\end{aligned}
$$

La probabilità richiesta, per la legge della probabilità totale è:

$$P(D) = P(D \mid A)P(A) + P(D \mid B)P(B) + P(D \mid C)P(C)$$

con

$$
\begin{aligned}
P(D \mid A) &= 0.05, P(A) = \frac{1}{3} \\
P(D \mid B) &= 0.2, P(B) = \frac{1}{3} \\
P(D \mid C) &= 0.1, P(C) = \frac{1}{3}
\end{aligned}
$$

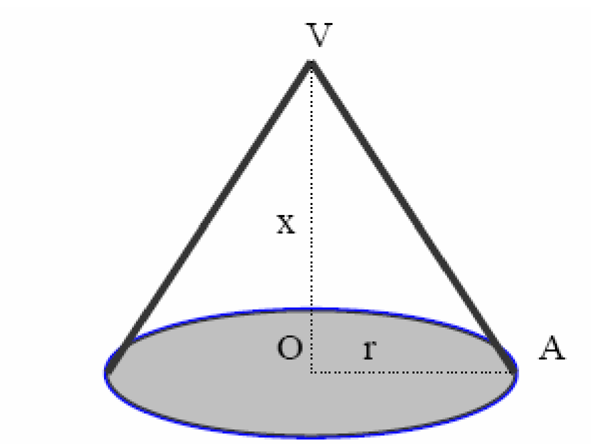
per cui

$$
\begin{aligned}
&P(D) = P(D \mid A)P(A) + P(D \mid B)P(B) + P(D \mid C)P(C) = \\
&= \frac{1}{20} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{60} + \frac{1}{15} + \frac{1}{30} = \frac{1+4+2}{60} = \frac{7}{60}
\end{aligned}
$$

Si noti come il numero di lampade difettose non influisce alcunché sui calcoli effettuati.

3)

Consideriamo la figura sottostante:



Il raggio di base del cono è $r = \sqrt{VA^2 - VO^2} = \sqrt{4 - x^2}, 0 \le x \le 2$.

Il volume del cono è $V(x) = \frac{1}{3}\left(\pi r^2\right) \cdot h = \frac{\pi}{3}\left(4 - x^2\right) \cdot x, 0 \le x \le 2$.

Si tratta quindi di massimizzare la funzione $V(x)=\frac{\pi}{3}\left(4-x^2\right)\cdot x$ in [0,2]. A tal proposito calcoliamo le derivate:

$$V'(x)=\frac{\pi}{3}\left(4-3x^2\right)\geq 0 \Rightarrow 0\leq \frac{2\sqrt{3}}{3}$$
$$V''(x)=-2\pi x, V''\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)=-\frac{4\pi\sqrt{3}}{3}<0$$

Quindi il volume massimo lo si ha per $x=\frac{2\sqrt{3}}{3}$ ed è pari a $V\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)=\frac{\pi}{3}\left(4-\frac{4}{3}\right)\cdot\frac{2\sqrt{3}}{3}=\frac{16\pi\sqrt{3}}{27}\,\mathrm{dm}^3=\frac{1600\pi\sqrt{3}}{27}\,\mathrm{cl}\approx 322.45\,\mathrm{cl}$, in cui si è applicata la conversione $1\,\mathrm{dm}^3=100\,\mathrm{cl}$.

4)

Ci sono molti polinomi il cui grafico tagliano la retta $y=2$ ben 4 volte. Una famiglia è data dai polinomi seguenti:

$$p(x)=\left[\prod_{\substack{j=i\\ i\in Z}}^{j=i+3}(x-j)\right]+2$$

Un polinomio del genere incontrerà la retta $y=2$ nei punti ad ascissa $x=i, x=i+1, x=i+2, x=i+3$.

Ad esempio per $i=1$ il polinomio richiesto è $p(x)=(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)+2=x^4-10x^3+35x^2-50x+26$.

5)

Il polinomio $p(x)=x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots\cdots+a_1x+a_0$ è una funzione continua e derivabile in tutto R. Se esso ammette radici reali, allora preso l'intervallo che ha come estremi due delle sue radici, supponiamo $[\alpha,\beta]$ con $\alpha,\beta \mid p(\alpha)=p(\beta)=0$, in esso possiamo applicare il teorema di Rolle, per cui $\exists\gamma\in(\alpha,\beta)\mid p'(\gamma)=0$, cioè $\exists\gamma\in(\alpha,\beta)\mid n\gamma^{n-1}+a_{n-1}(n-1)\gamma^{n-2}+\cdots\cdots+a_1=0$ come volevasi dimostrare.

6)

La funzione $y=x^3+bx-7$ è una cubica che nel punto $F=(0,-7)$ presenta un flesso.

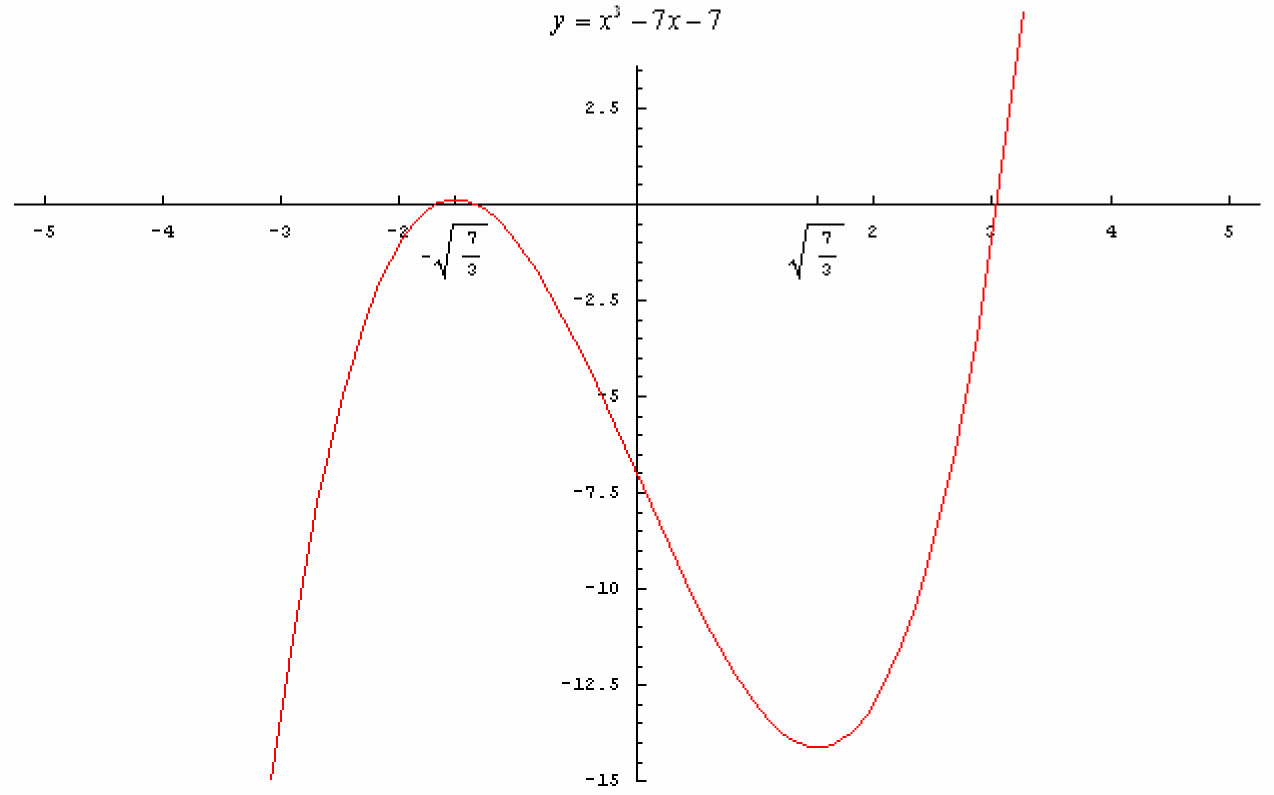
Affinchè l'equazione $y=x^3+bx-7=0$ abbia tre radici reali, devono essere soddisfatte le seguenti due condizioni:

- La funzione $y = x^3 + bx - 7$ dovrà avere un massimo ed un mninimo;
- I valori del massimo e del minimo devono essere discordi, cioè $y(x_m)\cdot y(x_M) < 0$.

Vediamo sotto quali condizioni la funzione $y = x^3 + bx - 7$ presenta un massimo ed un minimo: la derivata di $y = x^3 + bx - 7$ è $y' = 3x^2 + b$ ed essa presenta radici reali e distinte se e solo se $b < 0$. In questi casi $y' = 3x^2 + b > 0 \Leftrightarrow x < -\sqrt{-\frac{b}{3}}, x > \sqrt{-\frac{b}{3}}$. Inoltre la derivata seconda è $y'' = 6x$, per cui essendo $y''=\left(-\sqrt{-\frac{b}{3}}\right) = -6\sqrt{-\frac{b}{3}} < 0, y''=\left(\sqrt{-\frac{b}{3}}\right) = 6\sqrt{-\frac{b}{3}} > 0$, il punto di ascissa $x_M = -\sqrt{-\frac{b}{3}}$ è di massimo relativo ed il punto di ascissa $x_m = \sqrt{-\frac{b}{3}}$ è di minimo relativo. Quindi il punto di massimo $M = \left(-\sqrt{-\frac{b}{3}}, y(x_M)\right)$ si troverà o nel 2° o nel 3° quadrante, mentre quello di minimo $m = \left(\sqrt{-\frac{b}{3}}, y(x_m)\right)$ si troverà o nel 1° o nel 4° quadrante.

Ora, essendo l'ordinata del flesso negativa, l'ordinata del minimo sarà anch'essa negativa, per cui la condizione $y(x_m)\cdot y(x_M) < 0$ si traduce in $y(x_M) > 0$. Imponendo allora che $y(x_M) > 0$ si ha: $y(x_M) = x_M^3 + bx_M - 7 > 0 \Rightarrow \left(-\sqrt{-\frac{b}{3}}\right)^3 + b\left(-\sqrt{-\frac{b}{3}}\right) - 7 > 0 \Rightarrow -\sqrt{-\frac{b^3}{27}} - b\sqrt{-\frac{b}{3}} - 7 > 0$ da cui si ricava la condizione $-\sqrt{-\left(\frac{b}{3}\right)^2\cdot\frac{b}{3}} - b\sqrt{-\frac{b}{3}} - 7 > 0 \Rightarrow -\left|\frac{b}{3}\right|\sqrt{-\frac{b}{3}} - b\sqrt{-\frac{b}{3}} - 7 > 0$ ed essendo $b < 0$ la condizione si riduce a $\frac{b}{3}\sqrt{-\frac{b}{3}} - b\sqrt{-\frac{b}{3}} - 7 > 0 \Rightarrow -\frac{2b}{3}\sqrt{-\frac{b}{3}} > 7 \Leftrightarrow \left(-\frac{2b}{3}\sqrt{-\frac{b}{3}}\right)^2 > (7)^2$ da cui ricaviamo $b^3 < -\frac{49\cdot 27}{4} \Leftrightarrow b < -3\sqrt[3]{\left(\frac{7}{2}\right)^2} \Leftrightarrow b < -6.91565$.

Prendiamo ad esempio $b = -7$: la curva corrispondente è $y = x^3 - 7x - 7$ il cui grafico sotto presentato mostra la presenza di tre radici reali e distinte:



7)

La verifica dell'uguaglianza è immediata: infatti

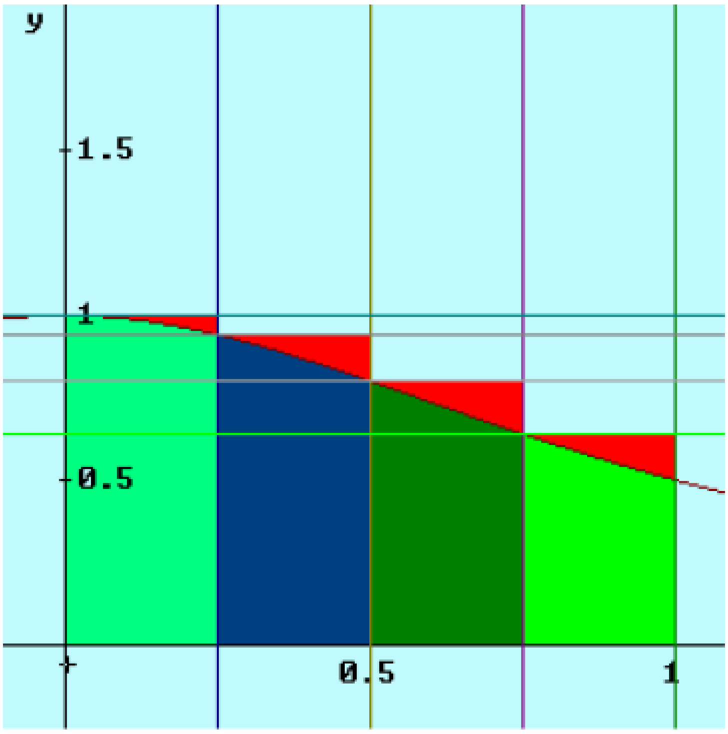
$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx = [\arctan(x)]_0^1 = \arctan(1) - \arctan(0) = \frac{\pi}{4} \Rightarrow 4\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx = \pi$$

Una approssimazione la si ricaveremo applicando applicando due metodi numerici :

- **Metodo dei rettangoli**: consiste matematicamente nel calcolare l'integrale attraverso la formula seguente

$$\int_a^b f(x)dx \cong \frac{b-a}{n}[f(x_0) + f(x_1) + \cdots f(x_{n-1})]$$

Si consideri l'intervallo [0,1] in 4 parti uguali come sotto evidenziato:



In tal caso si avrà:

$$4\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx \cong 4\cdot\frac{1}{4}\left[1+\frac{1}{1+\left(\frac{1}{4}\right)^2}+\frac{1}{1+\left(\frac{1}{2}\right)^2}+\frac{1}{1+\left(\frac{3}{4}\right)^2}\right]=\frac{1437}{425}\cong 3.38118$$

- **Metodo dei trapezi**: consiste matematicamente nel calcolare l'integrale attraverso la formula seguente

$$\int_a^b f(x)dx \cong \frac{b-a}{2n}\left[f(x_0)+f(x_n)+2\left[f(x_1)+\cdots+f(x_{n-1})\right]\right]$$

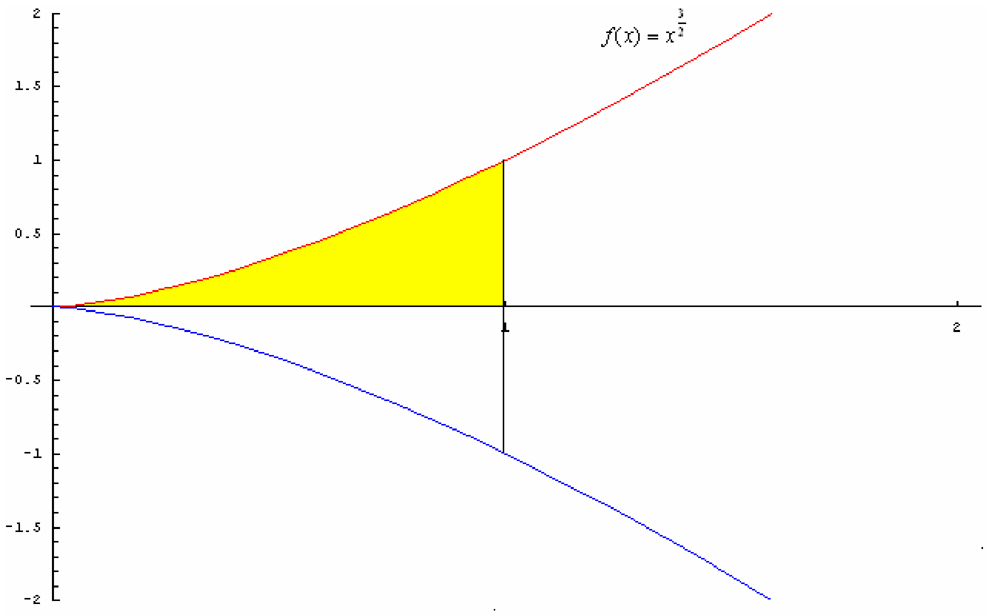
Si consideri l'intervallo [0,1] in 4 parti uguali: si avrà:

$$4\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx \cong 4\cdot\frac{(1-0)}{8}\left[\frac{1}{1+0^2}+\frac{1}{1+1^2}+\frac{2}{1+\left(\frac{1}{4}\right)^2}+\frac{2}{1+\left(\frac{1}{2}\right)^2}+\frac{2}{1+\left(\frac{3}{4}\right)^2}\right]=\frac{5323}{1700}\cong 3.13118$$

8)

Ricordiamo che il volume di un solido di rotazione ottenuto ruotando intorno all'asse delle ascisse una figura piana in un intervallo [a,b] è dato dalla formula $V=\pi\int_a^b [f(x)]^2\,dx$. Nel nostro caso, identificando con $f(x)=x^{\frac{3}{2}}$, il volume generato dalla rotazione di $f(x)=x^{\frac{3}{2}}$ in [0,1] intorno all' asse delle x è esattamente $V=\pi\int_0^1\left[x^{\frac{3}{2}}\right]^2 dx=\pi\int_0^1 x^3dx$.

La figura sotto raffigurata in giallo rappresenta la sezione di piano da far ruotare intorno all'asse delle ascisse in [0,1]:



9)

Risolviamo innanzitutto il seguente sistema calcolando $f'(x)$:

$$\begin{cases} f''(x)=\sin(x) \\ f'(0)=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f'(x)=\int \sin(x)dx=-\cos(x)+c \\ f'(0)=1 \end{cases} \Rightarrow c=2 \Rightarrow f'(x)=2-\cos(x)$$

Ora

$$f(x)=\int f'(x)dx=\int[2-\cos(x)]dx=2x-\sin(x)+k$$

Dunque

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right)-f(0)=(\pi-1+k)-k=\pi-1$$

10)

Per dimostrare che l'equazione $x^3-3x+1=0$ ha 3 radici reali, si può applicare la formula di cardano. Infatti tale formula afferma che una equazione cubica del tipo $x^3+px+q=0$ ha tre radici reali e distinte se e solo se $\Delta=\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}<0$. Nel nostro caso $p=-3, q=1$, per cui $\Delta=\frac{1}{4}+\frac{(-27)}{27}=\frac{1}{4}-1=-\frac{3}{4}<0$, per cui l'equazione $f(x)=x^3-3x+1=0$ ha 3 radici reali e distinte.

Una delle tre radici si trova nell'intervallo [0,1]: infatti $f(0)=1>0, f(1)=-1<0$ per cui a norma del teorema degli zeri esiste un valore interno all'intervallo [0,1] in cui la funzione $f(x)=x^3-3x+1$ deve annullarsi. Per calcolare tale valore si può applicare il metodo di bisezione; scegliamo come errore di approssimazione $\delta=10^{-3}$, cioè in pratica calcoleremo la radice cercata con 3 cifre significative. Il procedimento è sotto presentato nella tabella esemplificativa:

Estremo inferiore intervallo (inf)	**Estremo superiore intervallo (sup)**	**Centro Intervallo (inf+sup)/2**	**Valore di** $f(\inf)$	**Valore di** $f(\sup)$	**Valore di** $f\left(\frac{\inf+\sup}{2}\right)$	**Errore commesso:** $\varepsilon=\sup-\inf$
0	1	1/2	1	-1	-0.375	1
0	1/2	1/4	1	-0.375	0.265625	0.5
1/4	1/2	3/8	0.265625	-0.375	-0.0722656	0.25
1/4	3/8	5/16	0.265625	-0.0722656	0.0930176	0.125
5/16	3/8	11/32	0.0930176	-0.0722656	0.0093689	0.0625
11/32	3/8	23/64	0.0093689	-0.0722656	-0.0317116	0.03125
11/32	23/64	45/128	0.0093689	-0.0317116	-0.0112357	0.015625
11/32	45/128	89/256	0.0093689	-0.0112357	-0.000949323	0.0078125
11/32	89/256	177/512	0.0093689	-0.000949323	0.00420583	0.00390625
177/512	89/256	355/1024	0.00420583	-0.000949323	0.00162726	0.001953125
355/1024	89/256	711/2048	0.00162726	-0.000949323	0.000338721	0.0009765625
711/2048	**89/256**	-	0.00807739	-0.000949323	-	STOP

Quindi la soluzione cercata si trova nell'intervallo $\left[\frac{711}{2048},\frac{89}{256}\right]\approx[0.347168,0.347656]$, per cui $\bar{x}\approx 0.347$.