Y557 - ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO

CORSO SPERIMENTALE

PIANO NAZIONALE INFORMATICA

Tema di: MATEMATICA

Il candidato risolva uno dei due problemi e 5 dei 10 quesiti in cui si articola il questionario.

PROBLEMA 1

Nel piano Oxy sono date le curve λ e r d'equazioni:

$$\lambda:\ x^2 = 4(x-y) \quad \text{e} \quad r:\ 4y = x+6.$$

1. Si provi che λ e r non hanno punti comuni.
2. Si trovi il punto $P \in \lambda$ che ha distanza minima da r.
3. Si determini l'area della regione finita di piano racchiusa da λ e dalla retta s, simmetrica di r rispetto all'asse x.
4. Si determini il valore di c per il quale la retta $y = c$ divide a metà l'area della regione S del I quadrante compresa tra λ e l'asse x.
5. Si determini il volume del solido di base S le cui sezioni ottenute con piani ortogonali all'asse x sono quadrati.

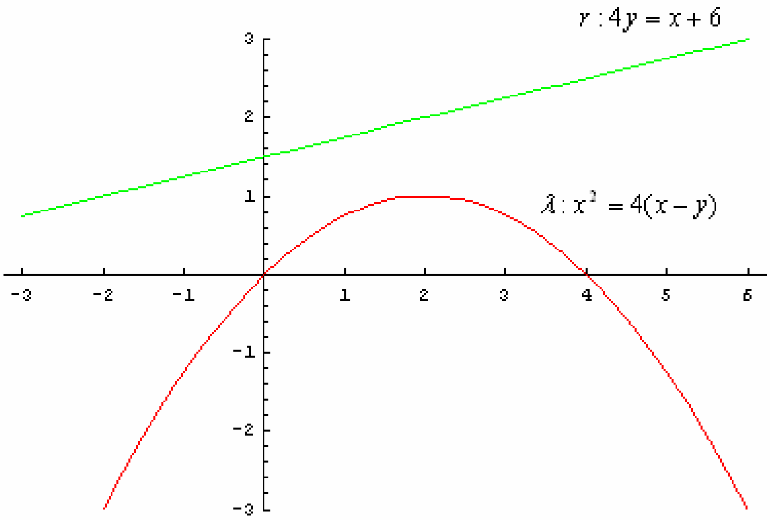
Soluzione

1)

La parabola di equazione $y = \frac{4x - x^2}{4}$ ha vertice in $V = (2,1)$ ed incontra l'asse delle ascisse in $A = (0,0), B = (4,0)$. Per mostrare che essa non ha punti in comune con la retta di equazione $4y = x + 6$, si deve innanzitutto risolvere il sistema seguente:

$$\begin{cases} 4y = 4x - x^2 \\ 4y = x + 6 \end{cases} \Rightarrow 4x - x^2 = x + 6 \Rightarrow x^2 - 3x + 6 = 0$$

Ma $x^2 - 3x + 6 = 0$ ha un discriminante $\Delta = 9 - 24 = -15 < 0$ per cui la retta è esterna alla parabola e non ha perciò alcun punto in comune con essa.



2)

Un punto generico della parabola ha coordinate $P=\left(x,\dfrac{4x-x^2}{4}\right)$ con $0\le x\le 4$. La distanza di P dalla retta $4y-x-6=0$, utilizzando la formula della distanza punto-retta si ha:

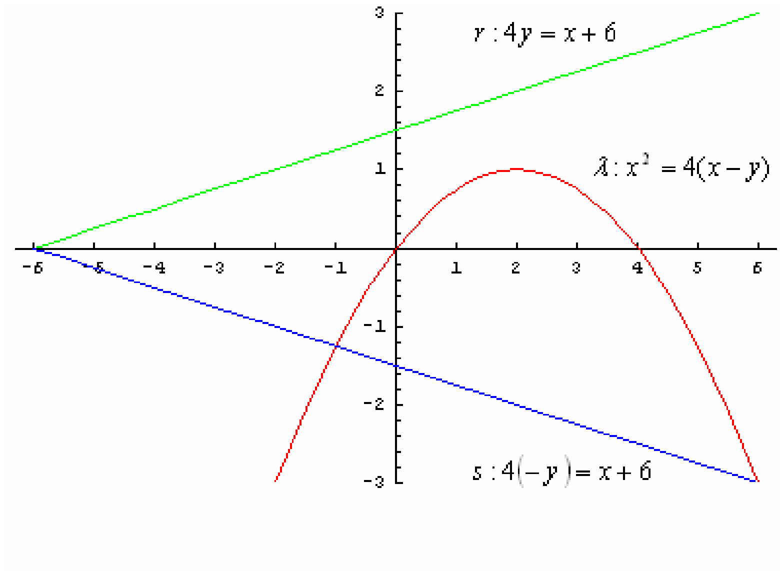
$$d(x)=\frac{\left|4x-x^2-x-6\right|}{\sqrt{17}}=\frac{\left|3x-x^2-6\right|}{\sqrt{17}}=\frac{x^2-3x+6}{\sqrt{17}}$$

in cui il valore assoluto è stato eliminato ed è stato cambiato il segno poiché $3x-x^2-6<0\ \ \forall x\in R$

Ora la distanza $d(x)=\dfrac{x^2-3x+6}{\sqrt{17}}$ non è altro che una parabola con concavità rivolta verso l'alto, per cui il minimo lo si raggiungerà nel suo vertice e sarà pari a $x_{\min}=V_{x,d(x)}=\dfrac{3}{2}\Rightarrow d_{\min}=\dfrac{15}{4\sqrt{17}}$. In conclusione $P=\left(\dfrac{3}{2},\dfrac{15}{16}\right)$.

3)

La retta simmetrica della retta di equazione $4y=x+6$ ha equazione $4(-y)=x+6$.



Le intersezioni della parabola $y = \dfrac{4x - x^2}{4}$ con la retta $s : 4(-y) = x + 6$ si trovano col sistema seguente:

$$\begin{cases} 4y = 4x - x^2 \\ -4y = x + 6 \end{cases} \Rightarrow 4x - x^2 = -x - 6 \Rightarrow x^2 - 5x - 6 = 0 \Rightarrow x = \frac{5 \pm 7}{2} \Rightarrow x_1 = 6, x_2 = -1$$

Le intersezioni sono allora $C = \left(-1, -\dfrac{5}{4}\right), D = (6, -3)$.

L'area richiesta è allora:

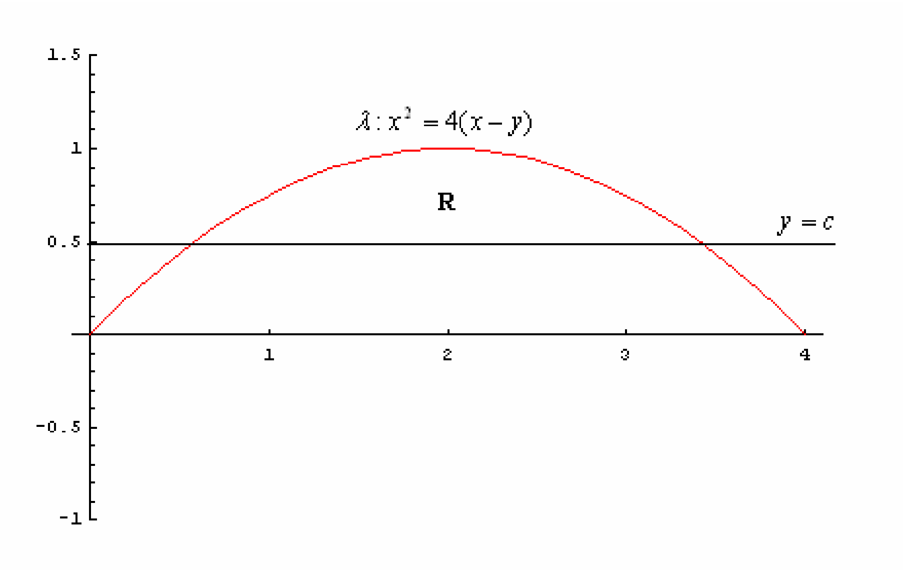
$$AREA = \int_{-1}^{6} \left[\left(-\frac{x^2}{4} + x \right) - \left(-\frac{x}{4} - \frac{3}{2} \right) \right] dx = \int_{-1}^{6} \left[\left(-\frac{x^2}{4} + \frac{5x}{4} + \frac{3}{2} \right) \right] dx =$$

$$\left[-\frac{x^3}{12} + \frac{5x^2}{8} + \frac{3x}{2} \right]_{-1}^{6} = -18 + \frac{45}{2} + 9 - \frac{1}{12} - \frac{5}{8} + \frac{3}{2} = \frac{-432 + 540 + 216 - 2 - 15 + 36}{24} = \frac{343}{24}$$

4)

L'area del segmento parabolico del primo quadrante, sfruttando il teorema di Archimede, è i $\dfrac{2}{3}$ dell'area del rettangolo circoscritto, per cui si ha $S = \dfrac{2}{3} * 4 * 1 = \dfrac{8}{3}$.

Si consideri la figura seguente:



Le intersezioni della parabola $y = \frac{4x - x^2}{4}$ con la retta $y = c$ si trovano col sistema seguente:

$$\begin{cases} 4y = 4x - x^2 \\ y = c \end{cases} \Rightarrow 4x - x^2 = 4c \Rightarrow x^2 - 4x + 4c = 0 \Rightarrow x = 2 \pm 2\sqrt{1-c}$$

L'area del segmento parabolico **R** delimitato dalla parabola di equazione $y = \frac{4x - x^2}{4}$ con la retta $y = c$, sfruttando il teorema di Archimede, è i $\frac{2}{3}$ dell'area del rettangolo circoscritto, per cui si ha

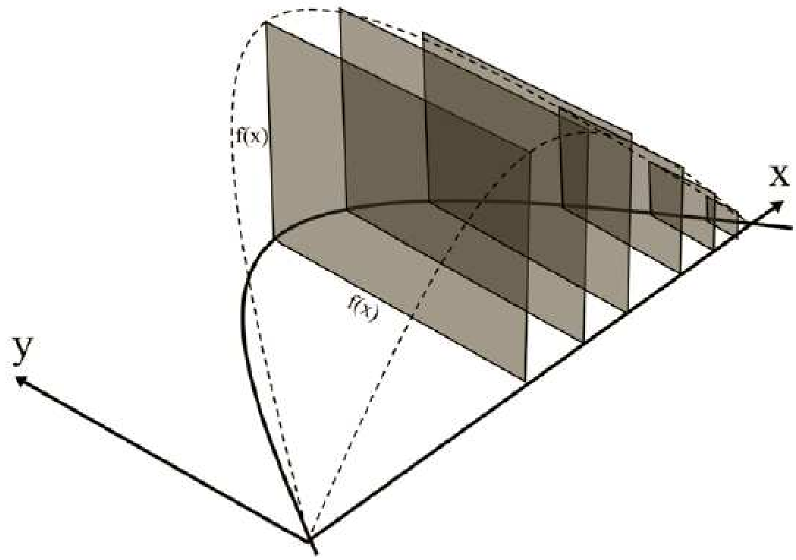
$$S(c) = \frac{2}{3}|1-c|\left(2 + 2\sqrt{1-c} - 2 + 2\sqrt{1-c}\right) = \frac{8}{3}|1-c|\sqrt{1-c} = \frac{8}{3}(1-c)^{\frac{3}{2}}$$

in cui il valore assoluto è superfluo visto che $0 \le c \le 1$. Ora imponendo che

$$S(c) = \frac{8}{3}(1-c)^{\frac{3}{2}} = \frac{S}{2} = \frac{4}{3} \Rightarrow (1-c)^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{2} \Rightarrow c = 1 - \frac{1}{\sqrt[3]{4}}$$

5)

La figura sottostante rappresenta alcune sezioni del solido richiesto:



Il volume richiesto è calcolabile attraverso l'integrale seguente:

$$V = \int_0^4 \left[x - \frac{x^2}{4} \right]^2 dx = \int_0^4 \left(x^2 + \frac{x^4}{16} - \frac{x^3}{2} \right) dx =$$

$$= \left[\frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{80} - \frac{x^4}{8} \right]_0^4 = \frac{64}{3} + \frac{1024}{80} - 32 = \frac{64}{3} + \frac{64}{5} - 32 = \frac{320 + 192 - 480}{15} = \frac{32}{15}$$

PROBLEMA 2

Si consideri la funzione f definita sull'intervallo $[0\,;+\infty[$ da:

$$\begin{cases} f(0)=1 \\ f(x)=\frac{1}{2}x^2(3-2\log x)+1 \quad se \quad x>0 \end{cases}$$

e sia C la sua curva rappresentativa nel riferimento Oxy, ortogonale e monometrico.

1. Si stabilisca se f è *continua* e *derivabile* in 0.
2. Si dimostri che l'equazione $f(x)=0$ ha, sull'intervallo $[0\,;+\infty[$, un'unica radice reale e se ne calcoli un valore approssimato con due cifre decimali esatte.
3. Si disegni C e si determini l'equazione della retta r tangente a C nel punto di ascissa $x=1$.
4. Sia n un intero naturale non nullo. Si esprima, in funzione di n, l'area A_n del dominio piano delimitato dalla curva C, dalla retta tangente r e dalle due rette: $x=\frac{1}{n}$ e $x=1$.
5. Si calcoli il limite per $n\to+\infty$ di A_n e si interpreti il risultato ottenuto.

Soluzione

1)

Per ipotesi sappiamo che $f(0)=1$, per cui affinché la funzione

$$\begin{cases} f(0)=1 \\ f(x)=\frac{x^2}{2}(3-2\ln x)+1 \quad x>0 \end{cases}$$

sia continua in $x=0$, dobbiamo provare che $\lim_{x\to0^+}\left[\frac{x^2}{2}(3-2\ln x)+1\right]=1$. Ed in effetti ricordando il teorema di De l'Hospital si ha che

$$\lim_{x\to0^+}x^2\ln x=\lim_{x\to0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x^2}}\overset{H}{=}\lim_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{2}{x^3}}=\lim_{x\to0^+}\left(-\frac{x^2}{2}\right)=0$$ per cui

$$\lim_{x\to0^+}\left[\frac{x^2}{2}(3-2\ln x)+1\right]=\lim_{x\to0^+}\left[\frac{3x^2}{2}\right]-\lim_{x\to0^+}x^2\ln x+1=0-1+1=1$$

Quindi la funzione considerata è continua in $x=0$.

Vediamo ora la derivabilità, calcolando la derivata di $f(x)=\frac{x^2}{2}(3-2\ln x)+1$ per $x>0$.

Si ha:

$$f'(x) = 3x - x - 2x\ln x = 2x - 2x\ln x$$

da cui

$$\lim_{x\to 0^+}[2x - 2x\ln x] = \lim_{x\to 0^+} 2x - \lim_{x\to 0^+} 2x\ln x = 0 - \lim_{x\to 0^+} 2x\ln x =$$

$$= -\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{2x}} \overset{H}{=} -\lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{2x^2}} = \lim_{x\to 0^+} 2x = 0$$

per cui la funzione presenta anche la derivata destra in $x = 0$ pari al valore di quella sinistra e cioè $f'(0^-) = f'(0^+) = 0$ e ciò dimostra la derivabilità della funzione stessa. Inoltre ricordando che per funzioni di una sola variabile reale la derivabilità implica la continuità, la dimostrazione della derivabilità in $x = 0$ implica anche la continuità della funzione in $x = 0$.

2)

Per dimostrare che l'equazione $f(x) = 0$ ha un'unica radice reale in $[0,+\infty[$ ricordiamo la derivata della funzione $f(x) = \frac{x^2}{2}(3 - 2\ln x) + 1$ per $x > 0$:

$$f'(x) = 2x - 2x\ln x = 2x(1 - \ln x) \ge 0 \Rightarrow 1 - \ln x \ge 0 \Rightarrow 0 < x \le e$$

per cui nell'intervallo $0 < x \le e$ la funzione è crescente ed assumerà certamente valori positivi essendo $f(0) = 1 > 0$, mentre in $[e,+\infty[$ la funzione è decrescente. Inoltre

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x^2}{2}(3 - 2\ln x) + 1\right] = 1 + \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{2}(3 - 2\ln x) = 1 + (+\infty)(-\infty) = 1 - \infty = -\infty$$

dal momento che $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{2} = +\infty, \lim_{x\to+\infty}(3 - 2\ln x) = -\infty$. Questo significa che in $[e,+\infty[$ $\exists!\,\bar{x} : f(\bar{x}) = 0$. Questo valore lo si trova applicando il teorema degli zeri. Ad esempio $f(4) = 8(3 - 4\ln 2) + 1 > 0, f(5) = \frac{25}{2}(3 - 2\ln 5) + 1 < 0$ per cui questa unica radice reale si troverà certamente nell'intervallo [4,5], e può essere calcolata con uno dei metodi numerici a disposizione, come il metodo di bisezione.

Applichiamo il metodo di bisezione all'intervallo $[4,5]$ accettando di fermarci quando l'ampiezza dell'intervallo considerato ad ogni iterazione è minore di 0.001. Per fare ciò riportiamo di seguito i dati ricavati tramite tabella excel:

a	b	$\frac{(a+b)}{2}$	$f(a)$	$f(b)$	$f\left[\frac{(a+b)}{2}\right]$	$b-a$	$b-a<0.001$	# bisezioni
4	5	4.5	2.81929	-1.73595	0.91743	1		
4.5	5	4.75	0.91743	-1.73595	-0.31189	0.5	no	1
4.5	4.75	4.625	0.91743	-0.31189	0.32670	0.25	no	2
4.625	4.75	4.6875	0.32670	-0.31189	0.01344	0.125	no	3
4.6875	4.75	4.71875	0.01344	-0.31189	-0.14771	0.0625	no	4
4.6875	4.71875	4.70313	0.01344	-0.14771	-0.06676	0.03125	no	5
4.6875	4.70313	4.69531	0.01344	-0.06676	-0.02656	0.01563	no	6
4.6875	4.69531	4.69141	0.01344	-0.02656	-0.00654	0.00781	no	7
4.6875	4.69141	4.68945	0.01344	-0.00654	0.00346	0.00391	no	8
4.68945	4.69141	4.69043	0.00346	-0.00654	-0.00154	0.00195	no	9
4.68945	4.69043		0.00346	-0.00154	0.00096	0.00098	stop	10

Quindi un valore approssimato con due cifre significative è $\bar{x} \cong 4.69$

3)

Studiamo ora la funzione

$$\begin{cases} f(0)=1 \\ f(x)=\frac{x^2}{2}(3-2\ln x)+1 \quad x>0 \end{cases}$$

Dominio: $x>0$ anche se abbiamo visto che essa è prolungabile per continuità in $x=0$

Intersezioni asse delle ascisse: come gia notato $\exists! \bar{x} : f(\bar{x})=0$ e si ha $\bar{x} \in [e,5]$

Intersezioni asse delle ordinate: l'unica intersezione è nel punto di prolungabilità per continuità e cioè (0,1).

Positività: come notato dallo studio della derivata prima, e dall'identificazione dell'unico zero reale presente la funzione è sempre crescente $0 < x \le e$ (con $f(0) = 1 > 0$) e decrescente $[e, +\infty[$, per cui la funzione è positiva in $[0, \bar{x})$ e negativa altrove.

Asintoti verticali: non ce ne sono vista la prolungabilità per continuità in $x = 0$

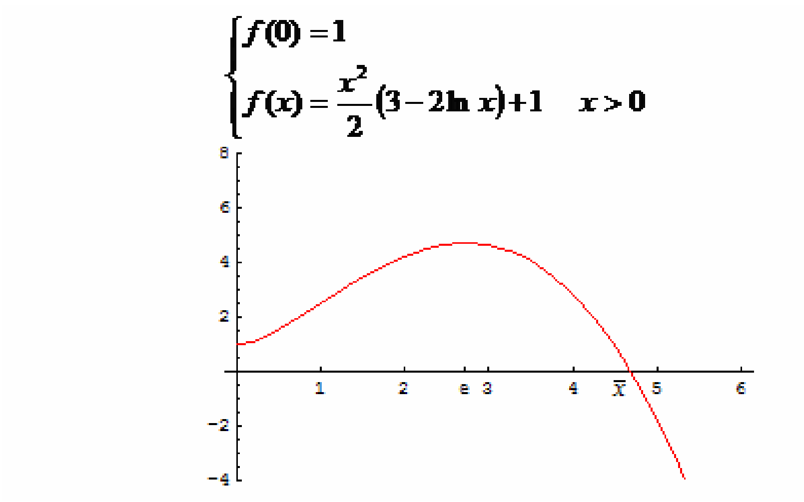
Asintoti orizzontali: non ce ne sono visto che $\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x^2}{2}(3 - 2\ln x) + 1\right] = -\infty$ come già evidenziato.

Asintoti obliqui: non ce ne sono poiché

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\left[\frac{x^2}{2}(3 - 2\ln x) + 1\right]}{x} = \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x}{2}(3 - 2\ln x) + 1\right] = -\infty$$

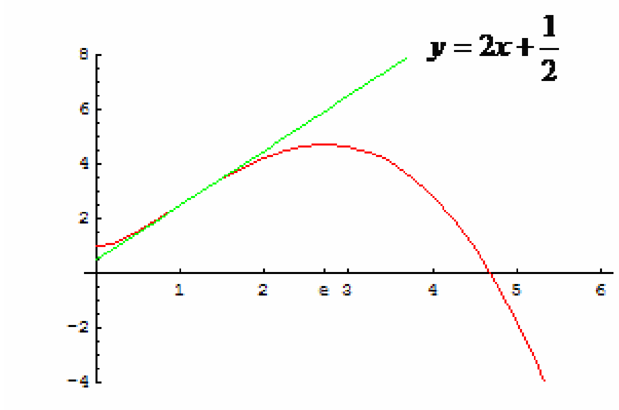
Crescenza e decrescenza: lo studio della derivata prima comporta che la funzione è sempre crescente $0 < x \le e$ e decrescente $[e, +\infty[$, mentre la derivata seconda per $x > 0$ è pari a $f''(x) = 2 - 2\ln x - 2 = -2\ln x = 0 \Rightarrow x = 1$ per cui in $\left(1, \frac{5}{2}\right)$ la funzione ha un flesso; inoltre $f''(e) = -2 < 0$ per cui il punto $\left(e, \frac{e^2}{2} + 1\right)$ è un massimo relativo ed assoluto per la funzione.

Il grafico è sotto presentato:



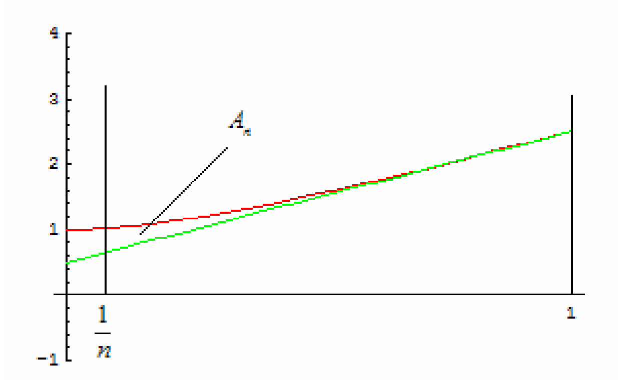
Nel punto $\left(1, \frac{5}{2}\right)$ la tangente ha equazione $y = m(x-1) + \frac{5}{2}$ con

$m = f'(1) = (2x - 2x\ln x)_{x=1} = 2$ per cui la tangente ha equazione $y = 2x + \frac{1}{2}$:



4)

Si consideri la figura seguente che è uno zoom della regione di interesse della figura precedente:



L’area richiesta è

$$A_n = \int_{\frac{1}{n}}^{1} \left[\frac{x^2}{2}(3-2\ln x)+1-\left(2x+\frac{1}{2}\right) \right] dx = \int_{\frac{1}{n}}^{1} \left[\frac{3x^2}{2} - 2x + \frac{1}{2} - x^2 \ln x \right] dx$$

Ricordando l’integrazione per parti si ha:

$$\int \left(x^2 \ln x\right) dx = \frac{x^3}{3}\ln x - \int \frac{x^3}{3}\left(\frac{1}{x}\right) dx = \frac{x^3}{3}\ln x - \frac{x^3}{9} + k$$

per cui

$$A_n = \int_{\frac{1}{n}}^{1} \left[\frac{x^2}{2}(3-2\ln x)+1-\left(2x+\frac{1}{2}\right) \right] dx = \int_{\frac{1}{n}}^{1} \left[\frac{3x^2}{2} - 2x + \frac{1}{2} - x^2 \ln x \right] dx =$$

$$= \left[\frac{x^3}{2} - x^2 + \frac{x}{2} - \frac{x^3}{3}\ln x + \frac{x^3}{9} \right]_{\frac{1}{n}}^{1} = \left[\frac{11x^3}{18} - x^2 + \frac{x}{2} - \frac{x^3}{3}\ln x \right]_{\frac{1}{n}}^{1} =$$

$$= \frac{11}{18} - 1 + \frac{1}{2} - \frac{11}{18n^3} + \frac{1}{n^2} - \frac{1}{2n} + \frac{1}{3n^3}\ln\left(\frac{1}{n}\right) =$$

$$= \frac{1}{9} - \frac{11}{18n^3} + \frac{1}{n^2} - \frac{1}{2n} - \frac{\ln(n)}{3n^3}$$

5)

Va calcolato il seguente limite:

$$\lim_{n\to+\infty} A_n = \lim_{n\to+\infty}\left[\frac{1}{9} - \frac{11}{18n^3} + \frac{1}{n^2} - \frac{1}{2n} - \frac{\ln(n)}{3n^3} \right] = \frac{1}{9} + \lim_{n\to+\infty}\left(-\frac{11}{18n^3} + \frac{1}{n^2} - \frac{1}{2n} \right) - \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{\ln(n)}{3n^3} \right)$$

Ora $\lim_{n\to+\infty}\left(-\frac{11}{18n^3}+\frac{1}{n^2}-\frac{1}{2n}\right)=\lim_{n\to+\infty}\left(-\frac{11}{18n^3}\right)+\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n^2}\right)+\lim_{n\to+\infty}\left(-\frac{1}{2n}\right)=0$ essendo i tre limiti banalmente nulli.

Inoltre applicando de l'Hopital si ha per l'altro limite:

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{\ln(n)}{3n^3}\right)\overset{H}{=}\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{1}{n}}{9n^2}=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{9n^3}=0$$ per cui

$$\lim_{n\to+\infty}A_n=\lim_{n\to+\infty}\left[\frac{1}{9}-\frac{11}{18n^3}+\frac{1}{n^2}-\frac{1}{2n}-\frac{\ln(n)}{3n^3}\right]=\frac{1}{9}+\lim_{n\to+\infty}\left(-\frac{11}{18n^3}+\frac{1}{n^2}-\frac{1}{2n}\right)-\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{\ln(n)}{3n^3}\right)=\frac{1}{9}$$

Questo risultato lo si interpreta geometricamente col fatto che se $n\to+\infty$ la retta $x=\frac{1}{n}$ tende all'asse delle ordinate, per cui A_∞ rappresenta l'area compresa tra il grafico della funzione, l'asse delle ordinate e la sua tangente inflessionale in $\left(1,\frac{5}{2}\right)$.

Y557 - ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO

CORSO SPERIMENTALE

PIANO NAZIONALE INFORMATICA

Tema di: MATEMATICA

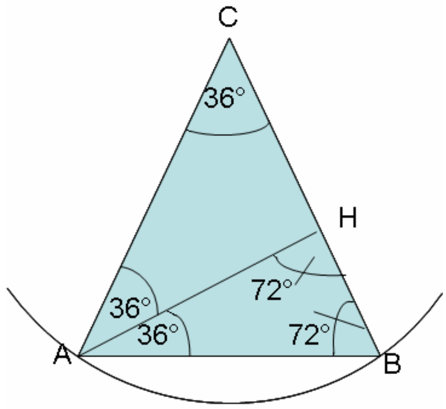
QUESTIONARIO

1. Si dimostri che il lato del decagono regolare inscritto in un cerchio è sezione aurea del raggio e si utilizzi il risultato per calcolare $sen 18°$, $sen 36°$.
2. Si dia una definizione di retta tangente ad una curva. Successivamente, si dimostri che la curva $y = x \; sen \; x$ è tangente alla retta $y = x$ quando $sen \; x = 1$ ed è tangente alla retta $y = -x$ quando $sen \; x = -1$.
3. Si determinino le equazioni di due simmetrie assiali σ e φ la cui composizione $\sigma \circ \varphi$ dia luogo alla traslazione di equazione:
$$\begin{cases} x' = x + \sqrt{5} \\ y' = y - \sqrt{5} \end{cases}$$
Si determinino poi le equazioni della trasformazione che si ottiene componendo le due simmetrie in ordine inverso $\varphi \circ \sigma$.
4. Una bevanda viene venduta in lattine, ovvero contenitori a forma di cilindro circolare retto, realizzati con fogli di latta. Se una lattina ha la capacità di *0,4 litri*, quali devono essere le sue dimensioni in *centimetri*, affinché sia minima la quantità di latta necessaria per realizzarla? (Si trascuri lo spessore della latta).
5. Come si definisce e quale è l'importanza del numero *e* di *Nepero* [nome latinizzato dello scozzese John Napier (1550-1617)]? Si illustri una procedura che consenta di calcolarlo con la precisione voluta.
6. Le rette *r* e *s* d'equazioni rispettive $y = 1 + 2x$ e $y = 2x - 4$ si corrispondono in una omotetia σ di centro l'origine O. Si determini σ.
7. Come si definisce *n!* (*n fattoriale*) e quale ne è il significato nel calcolo combinatorio? Quale è il suo legame con i coefficienti binomiali? Perché?
8. Si trovi l'equazione della retta tangente alla curva di equazioni parametriche $x = e^t + 2$ e $y = e^{-t} + 3$ nel suo punto di coordinate (3, 4).
9. Quale è la probabilità di ottenere 10 lanciando due dadi? Se i lanci vengono ripetuti quale è la probabilità di avere due 10 in sei lanci? E quale è la probabilità di avere almeno due 10 in sei lanci?
10. Il 40% della popolazione di un Paese ha 60 anni o più. Può l'età media della popolazione di quel Paese essere uguale a 30 anni? Si illustri il ragionamento seguito per dare la risposta.

Soluzione

1)

Si consideri la figura seguente:



L'angolo in $\hat{C} = 36°$ essendo la decima parte dell'angolo piatto, mentre il lato AB del triangolo ABC è evidentemente il lato del decagono inscritto, mentre AH è la bisettrice riferita al lato BC. In questo modo si ha: $H\hat{A}B = H\hat{A}C = 36° \Rightarrow AH = HC, A\hat{B}H = A\hat{H}B = 72° \Rightarrow HA = AB$. In questo modo il triangolo AHB risulta essere simile al triangolo di partenza ABC per cui vale la seguente uguaglianza:

$$\frac{CH}{CB} = \frac{HB}{AB} = \frac{CB - CH}{CH}$$

Ora detto $CH = HA = AB = x$ l'uguaglianza si riscrive:

$$\frac{x}{r} = \frac{r - x}{x} \Rightarrow x^2 + rx - r^2 = 0 \Rightarrow x = r\frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

di cui la soluzione accettabile è $x = r\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ essendo $CH = HA = AB = x$ il lato del decagono e quindi una quantità strettamente positiva. Per cui, ricordando che $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ è la sezione aurea dell'unità, si ha che il lato del decagono è sezione aurea del raggio.

Ora per il teorema dei seni applicato al triangolo AHB si ha:

$$\frac{AB}{\sin(72°)} = \frac{HB}{\sin(36°)} \Rightarrow \frac{AB}{HB} = \frac{\sin(72°)}{\sin(36°)} = \frac{2\sin(36°)\cos(36°)}{\sin(36°)} = 2\cos(36°) \Rightarrow$$

$$\cos(36°) = \frac{AB}{2HB} = \frac{AB}{2(CB-CH)} = \frac{AB}{2(CB-AB)} = \frac{r\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}{2r\left[1-\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right]} = \frac{\sqrt{5}-1}{2(3-\sqrt{5})} = \frac{(3+\sqrt{5})(\sqrt{5}-1)}{8} = \frac{\sqrt{5}+1}{4}$$

Ora $\sin(36°) = \sqrt{1-\cos^2(36°)} = \sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{5}+1}{4}\right)^2} = \sqrt{1-\left(\frac{6+2\sqrt{5}}{16}\right)} = \frac{1}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$ mentre

$$\sin(18°) = \cos(72°) = \sqrt{1-\sin^2(72°)} = \sqrt{1-\left(\frac{AB\sin(36°)}{HB}\right)^2} = \sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^2\left(\frac{5-\sqrt{5}}{8}\right)} =$$

$$\sqrt{1-\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)\left(\frac{5-\sqrt{5}}{8}\right)} = \sqrt{1-\frac{10+2\sqrt{5}}{16}} = \sqrt{\frac{6-2\sqrt{5}}{16}} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$$

2)

Affinché due curve $f(x), g(x)$ siano tangenti nel medesimo punto di ascissa x_0 deve aversi che

$$\begin{cases} f(x_0) = g(x_0) \\ f'(x_0) = g'(x_0) \end{cases}$$

La prima condizione per le curve $f(x) = x\sin(x), g(x) = x$ comporta $\sin(x_0) = 1 \Rightarrow x_0 = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, mentre la seconda impone $\sin(x_0) + x_0\cos(x_0) = 1$, equazione quest'ultima soddisfatta da $x_0 = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$. Ecco per cui è stato dimostrato che le due curve $f(x) = x\sin(x), g(x) = x$ sono tangenti quando $\sin(x) = 1$.

Analogamente il discorso vale per $f(x) = x\sin(x), g(x) = -x$ per le quali la prima condizione impone $\sin(x_0) = -1 \Rightarrow x_0 = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$, mentre la seconda impone $\sin(x_0) + x_0\cos(x_0) = -1$, equazione quest'ultima soddisfatta da $x_0 = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$. Ecco per cui è stato dimostrato che le due curve $f(x) = x\sin(x), g(x) = -x$ sono tangenti quando $\sin(x) = -1$.

3)

Nella teoria delle trasformazioni geometriche, una traslazione corrisponde alla composizione $\sigma \circ \phi$ di due simmetrie assiali , ϕ con asse r e σ con asse s. Inoltre se la composizione è una traslazione si ha:

- I due assi, r, s sono paralleli;
- I due assi, r, s sono perpendicolari al vettore $\vec{v}$ di traslazione;
- La distanza tra i due assi è la metà del modulo del vettore $\vec{v}$;
- Il vettore $\vec{v}$ è diretto da r verso s.

Il vettore $\vec{v}$ di traslazione è pari a $\vec{v} = \left(\sqrt{5}, -\sqrt{5}\right)$, per cui la piu' immediata retta perpendicolare al vettore $\vec{v} = \left(\sqrt{5}, -\sqrt{5}\right)$ non è altro che la bisettrice del primo e terzo quadrante, cioè $r: y = x$ per cui la prima trasformazione è:

$$\phi: \begin{cases} x' = y \\ y' = x \end{cases}$$

Ora una retta s parallela alla retta $r: y = x$ e che ha distanza da essa pari a $d = \frac{1}{2}|\vec{v}| = \frac{1}{2}\sqrt{v_x^{\,2} + v_y^{\,2}} = \frac{1}{2}\sqrt{10}$, passa per il punto $\left(\frac{\sqrt{5}}{2}, -\frac{\sqrt{5}}{2}\right)$ ed ha equazione $s: y = x - \sqrt{5}$. Ora dobbiamo determinare la trasformazione σ.

Per fare ciò dobbiamo ricordare che dato un generico punto $P(x, y)$ ed il suo simmetrico $P'(x', y')$ rispetto a σ, la retta PP' è perpendicolare ad $s: y = x - \sqrt{5}$ per cui dobbiamo imporre che $\frac{y' - y}{x' - x} = -1 \Rightarrow y' - y + x' - x = 0$ e che il punto medio del segmento PP' appartenga alla retta $s: y = x - \sqrt{5}$ cioè $\frac{y' + y}{2} = \frac{x' + x}{2} - \sqrt{5} \Rightarrow y' + y - (x' + x) = -2\sqrt{5}$. Per cui dal sistema

$$\begin{cases} y' - y + (x' - x) = 0 \\ y' + y - (x' + x) = -2\sqrt{5} \end{cases}$$

ricaviamo, sottraendo l'una dall'altra e poi sostituendo:

$$\sigma: \begin{cases} x' = x + y - y' = y + \sqrt{5} \\ y' = x - \sqrt{5} \end{cases}$$

Per cui la trasformazione completa diretta fornisce:

$$\sigma \circ \phi : P(x, y) \xrightarrow{\phi} P'(x', y') \xrightarrow{\sigma} P''(x'', y'')$$

$$\sigma \circ \phi : \begin{cases} x' = y \\ y' = x \end{cases} \xrightarrow{\sigma} \begin{cases} x'' = y' + \sqrt{5} = x + \sqrt{5} \\ y'' = x' - \sqrt{5} = y - \sqrt{5} \end{cases}$$

Che corrisponde alla trasformazione originaria.

La trasformazione inversa comporta:

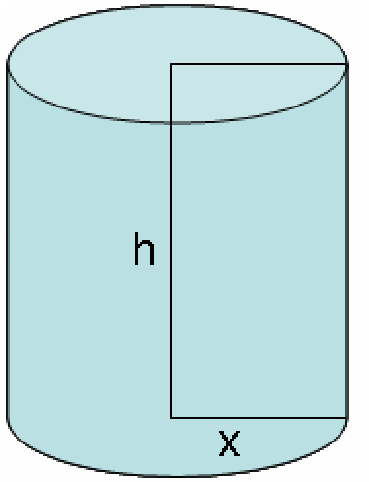
$$\phi \circ \sigma : P(x, y) \xrightarrow{\sigma} P'(x', y') \xrightarrow{\phi} P''(x'', y'')$$

$$\phi \circ \sigma : \begin{cases} x' = y + \sqrt{5} \\ y' = x - \sqrt{5} \end{cases} \xrightarrow{\sigma} \begin{cases} x'' = y' = x - \sqrt{5} \\ y'' = x' = y + \sqrt{5} \end{cases}$$

con vettore di traslazione $\vec{v} = \left(-\sqrt{5}, \sqrt{5}\right)$

4)

Il cilindro circolare retto della figura sottostante ha raggio di base $x > 0$ ed altezza $h > 0$.



La sua superficie totale sarà allora

$$A_T = A_{basi} + A_{laterale} = 2\pi x^2 + 2\pi hx$$

Inoltre per ipotesi $V = \pi hx^2$ da cui $h = \frac{V}{\pi x^2}$ per cui

$$A_T = 2\pi x^2 + 2\pi hx = 2\pi x^2 + \frac{2V}{x}$$

L'obiettivo è ora di minimizzare l'area totale, per cui si calcolano le derivate:

$$A_T^{'} = 4\pi x - \frac{2V}{x^2} = \frac{2\left(2\pi x^3 - V\right)}{x^2} > 0 \Rightarrow \pi x^3 - V > 0 \Rightarrow x > \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$$

$$A_T^{''} = 4\pi + \frac{4V}{x^3}$$

$$A_T^{''}\left(\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}\right) = 8\pi > 0$$

per cui il minimo dell'area totale lo si raggiunge quando $x = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$ da cui

$h = \frac{V}{\pi x^2} = \frac{V}{\pi\left(\frac{V}{2\pi}\right)^{\frac{2}{3}}} = \frac{VV^{-\frac{2}{3}}2^{\frac{2}{3}}\pi^{\frac{2}{3}}}{\pi} = 2\left(\frac{V}{2\pi}\right)^{\frac{1}{3}} = 2\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}} = 2x$. Quindi il minimo dell'area totale lo si ha quando l'altezza è pari al diametro di base e quindi quando il cilindro retto risulta equilatero. Inoltre utilizzando i dati presenti si ha $V = 0.4l \cong 400cm^3$ da cui

$$x = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}} = \sqrt[3]{\frac{200}{\pi}} \cong 4cm$$
$$h = 2x \cong 8cm$$

5)

Il numero di Nepero, come π, è un numero trascendente irrazionale cioè non è soluzione di una equazione polinomiale a coefficienti razionali. Se a Nepero è attribuita la scoperta del numero **e**, ad Eulero va il merito di averlo approfondito e reso popolare. Fu Eulero per primo ad indicarlo con la lettera "**e**" ed a calcolarlo fino alla 13ª cifra decimale: **2.7182818284590**.
Le definizioni del numero di Nepero possono essere molteplici. Ne evidenzieremo tre. La prima si basa sul concetto di limite , per cui il numero di Nepero non è altro che

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e.$$

La seconda sfrutta l'espansione in serie di Taylor della funzione esponenziale per cui un'ulteriore definizione potrebbe essere fornita dalla somma della seguente serie convergente:

$$e = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!} = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots\cdots$$

Un modo alternativo (non standard) di definire ***e*** coinvolge le equazioni differenziali: il numero di Nepero si può definire come il valore in $x = 1$ della funzione $f(x)$ soluzione unica del problema di Cauchy dato dall'equazione differenziale $f'(x) = f(x)$ con condizioni iniziali $f(0) = 1$ e risolvibile semplicemente attraverso la separazione delle variabili come mostreremo a breve.
Il problema di Cauchy è

$$\begin{cases} f'(x) = f(x) \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

che sotto alcune ipotesi, si dimostra fornire un'unica soluzione.
Per calcolarla basta ricordare le equazioni differenziali a variabili separabili: infatti l'equazione differenziale $f'(x) = f(x)$, supponendo $f(x) \neq 0$ si può riscrivere come:

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = 1$$

Ed integrando ambo i membri in dx si ricava:

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \int dx \text{ cioè } \ln|f(x)| = x + k$$

Quindi il problema iniziale diventa:

$$\begin{cases} \ln|f(x)| = x + k \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

Dalla prima, per x=0, si ricava $\ln|f(0)| = k$ e ricordando che la condizione iniziale impone $f(0) = 1$, allora si ricava $k = \ln 1 = 0$, per cui infine si ricava:

$$\ln|f(x)| = x \to |f(x)| = e^x \to f(x) = \pm e^x$$

In cui va scartata la soluzione $f(x) = -e^x$ perché non soddisfa la condizione iniziale.
In conclusione la soluzione esiste, è unica ed è l'autofunzione $f(x) = e^x$ che valutata in $x = 1$ fornisce il numero di Nepero.

Il problema di Cauchy sopra svolto torna utile anche perché evidenzia come la funzione $f(x) = e^x$ abbia derivata coincidente con essa stessa (ecco per cui è chiamata autofunzione), per cui a questo punto avremmo risposto anche alla seconda domanda posta dal quesito.
Un ulteriore modo per dimostrare ciò è applicare la definizione e quindi effettuare il limite del rapporto incrementale:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{x+h-x} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} =$$
$$\lim_{h \to 0} \frac{e^x(e^h - 1)}{h} = e^x \lim_{h \to 0} \frac{(e^h - 1)}{h} = e^x$$

dal momento che $\lim_{h\to 0}\frac{\left(e^h-1\right)}{h}=1$ per il limite fondamentale.

Un modo per calcolare il valore è sfruttare una delle sue definizioni, ad esempio quella come limite di successione $\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e$. In tal caso si può notare come già per n=5000 si ottiene un'approssimazione con le prime tre cifre decimali corrette.

6)

Poiché le due rette si corrispondono secondo una omotetia di centro l'origine, allora l'equazione dell'omotetia è

$$\sigma:\begin{cases}x'=ax\\ y'=ay\end{cases}$$

e la sua inversa sarà:

$$\sigma^{-1}:\begin{cases}x=\frac{x'}{a}\\ y=\frac{y'}{a}\end{cases}$$

Sostituendo entrambe le equazioni della trasformazione σ^{-1} nell'equazione della retta $y=2x+1$ si ricava la retta $\frac{y'}{a}=2\frac{x'}{a}+1\Leftrightarrow y'=2x'+a$. Tale retta corrisponde alla retta $y=2x-4$ se e solo se $a=-4$ per cui

$$\sigma:\begin{cases}x'=-4x\\ y'=-4y\end{cases}$$

e la sua inversa sarà:

$$\sigma^{-1}:\begin{cases}x=-\frac{x'}{4}\\ y=-\frac{y'}{4}\end{cases}$$

7)

Matematicamente il fattoriale è definito in maniera ricorsiva e cioè:

$$n!=\begin{cases}n(n-1)! & n\geq 1\\ 1 & n=0\end{cases}$$

Nel calcolo combinatorio e probabilistico il simbolo n! indica il numero di permutazioni che si possono fare con n oggetti.
Ad esempio se volessimo conoscere quante parole è possibile comporre con n lettere prese a caso, allora il numero di tali parole sarà $n! = n(n-1 = (n-2)(n-3)\ldots\ldots * 2 * 1$.
Prendiamo a tal proposito la parola TRE e vediamo quante altre parole si ricavano permutando le lettere T, R ed E: si hanno le seguenti parole:

TRE,TER,RTE,RET,ETR,ERT

cioè si hanno 6 parole come previsto dal fattoriale 3!=3*2*1=6.

Il legame col coefficiente binomiale viene fuori della potenza n-esima del binomio di Newton

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

dove $\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ è il cosiddetto coefficiente binomiale.

Il simbolo $\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ in termini probabilistici indica il numero di scelte che si possono fare con *k* oggetti a partire dagli *n* totali.
Ad esempio se lanciamo 5 volte una moneta non truccata e vogliamo sapere quante volte escono tre teste, utilizzando il coefficiente binomiale si ricava che tre teste escono un numero di volte pari a

$$\binom{5}{3} = \frac{5!}{3!(5-3)!} = \frac{5!}{(3!)(2!)} = \frac{120}{6*2} = 10$$

Infatti le possibili combinazioni di 3 teste sui 5 lanci in totale sono:
TTTCC, TTCTC, TTCCT, TCTCT, TCTTC, TCCTT, CTTTC, CTTCT, CTCTT, CCTTT.
Per cui la probabilità che escono tre teste in 5 lanci sarà, sfruttando la distribuzione binomiale ed essendo la probabilità di uscire testa pari a quella di uscire croce e pari ad $P(C) = P(T) = \dfrac{1}{2}$ visto che la moneta è non truccata:

$$P(3\,\text{TESTE}) = \binom{5}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{10}{32} = \frac{5}{16}$$

Probabilità che potevamo calcolare anche rapportando i casi favorevoli (10) sui casi totali ($2^5 = 32$).

8)

Bisogna innanzitutto esplicitare la curva come $y = f(x)$.

Da $x = e^t + 2$ deriva $e^t = x - 2 \Rightarrow e^{-t} = \frac{1}{x-2}$ per cui si ricava $y = \frac{1}{x-2} + 3$.

Il punto di tangenza è $P = (3,4)$ e la tangente in esso è $y = m(x-3) + 4$ con $m = y'(3) = \left(-\frac{1}{(x-2)^2} \right)_{x=3} = -1$ per cui la tangente è $y = -(x-3) + 4 = -x + 7$

9)

Lanciando due dadi il risultato 10 lo si ottiene 3 volte su 36, in corrispondenza di entrambe le facce 5 e di una faccia 4 e l'altra 6 e viceversa, per cui

$$\Pr\{somma\,10\} = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}.$$

In sei lanci la probabilità di ottenere due 10 la si ricava attraverso l'utilizzo della variabile aleatoria binomiale per cui

$$\Pr\{2 \text{ volte } somma\,10 \text{ in } 6 \text{ lanci}\} = \binom{6}{2}\left(\frac{1}{12}\right)^2\left(\frac{11}{12}\right)^4 = \frac{6!}{2!4!}\left(\frac{1}{12}\right)^2\left(\frac{11}{12}\right)^4 = 15\frac{11^4}{12^6} \approx 0.0735$$

Infine

$$\begin{aligned}
&\Pr\{almeno\ 2 \text{ volte } somma\,10 \text{ in } 6 \text{ lanci}\} = \\
&= 1 - \Pr\{0 \text{ volte } somma\,10 \text{ in } 6 \text{ lanci}\} - \Pr\{1 \text{ volte } somma\,10 \text{ in } 6 \text{ lanci}\} = \\
&= 1 - \binom{6}{0}\left(\frac{1}{12}\right)^0\left(\frac{11}{12}\right)^6 - \binom{6}{1}\left(\frac{1}{12}\right)^1\left(\frac{11}{12}\right)^5 = 1 - \left(\frac{11}{12}\right)^6 - 6\frac{11^5}{12^6} \approx 0.0831
\end{aligned}$$

10)

Indichiamo con $m = 30$ l'età media della popolazione. Ora il 40% della popolazione ha un'età $x \geq 60$ anni, per cui il restante 60% ha un'età $y < 60$ anni.

Studiamo prima il caso in cui il 40% della popolazione ha un'età $x = 60$ anni . In tal caso ricordando che l'età media $m = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i$ in termini matematici ciò lo si spiega attraverso la seguente equazione:

$$\begin{aligned}
&0.4x + 0.6y = m = 30 \Rightarrow \\
&0.6y = 30 - 0.4 * 60 = 30 - 24 = 6 \Rightarrow \\
&0.6y = 6 \Rightarrow y = 10
\end{aligned}$$

Quindi se il 40% della popolazione ha un'età $x = 60$ anni ed il rimanente 60% ha 10 anni, allora l'età media è 30 anni.
Studiamo ora il caso in cui il 40% della popolazione ha un'età $x \geq 60$ anni
In tal caso bisogna imporre il sistema seguente:

$$\begin{cases} 0.4x + 0.6y = 30 \\ x \geq 60 \\ 0 < y < 60 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \dfrac{150-2x}{3} \\ x \geq 60 \\ 0 < y < 60 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{150-2x}{3} > 0 \\ \dfrac{150-2x}{3} < 60 \\ x \geq 60 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < 75 \\ x > -15 \\ x \geq 60 \end{cases} \Leftrightarrow 60 \leq x < 75$$

Quindi in conclusione se 40% della popolazione ha un'età $x \geq 60$ anni, per avere un'età media di 30 anni, tale età non può superare i 75 anni, cioè $60 \leq x < 75$.