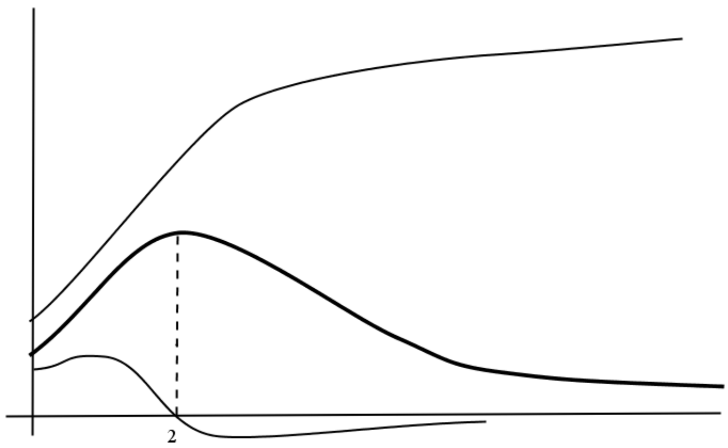
Problema 1 PNI

1. Nelle ipotesi di derivabilità del problema, un punto di massimo x_0 per f' deve annullare la sua derivata prima ($f''(x_0) = 0$) e localmente soddisfare la disuguaglianza $f''(x) \geq 0$ per $x < x_0$ e $f''(x) \leq 0$ per $x > x_0$. L'unico zero di f' è $x_0 = 2$.
Dall'informazione relativa alla tangente a Γ, sappiamo che questa ha per equazione $y = f'(2)(x-2)+4$. Imponendo il passaggio per l'origine, otteniamo $f'(2) = 2$.
Il punto di massimo di f' ha dunque coordinate $(2, 2)$.
Un possibile andamento di f' si ha tenendo conto che f' ha un unico punto di massimo e che tende a 0 per $x \to +\infty$ (il grafico di f ha un asintoto orizzontale, per $x \to +\infty$).



2. In un modello di dinamica delle popolazioni, le informazioni sul grafico di f suggeriscono che la popolazione cresce inizialmente a buon ritmo per poi ($x > 2$) rallentare la crescita e tendere ($x \to +\infty$) a uno stato di equilibrio.

3. Sappiamo che Γ passa per il punto $(2, 4)$. Otteniamo allora la condizione: $4 = \dfrac{a}{1+e^{b-2}}$.
Sappiamo anche che il coefficiente angolare della retta tangente al grafico di Γ in $x_0 = 2$ vale 2. Abbiamo allora l'uguaglianza $f'(2) = 2$ ovvero $\dfrac{ae^{b-2}}{(1+e^{b-2})^2} = 2$.
Il sistema
$$\begin{cases} \dfrac{a}{1+e^{b-2}} = 4 \\ \dfrac{ae^{b-2}}{(1+e^{b-2})^2} = 2 \end{cases}$$
porta alla condizione $\dfrac{e^{b-2}}{1+e^{b-2}} = \dfrac{1}{2}$ ovvero $e^{b-2} = 1$ ovvero $b - 2 = 0$. Abbiamo così $b = 2$ e $a = 8$.

4. L'area richiesta è data da
$$\int_0^2 f''(x)\,dx = [f'(x)]_0^2 = \left[\frac{8e^{2-x}}{(1+e^{2-x})^2}\right]_0^2 = 2 - \frac{8e^2}{(1+e^2)^2}$$

Problema 2 PNI

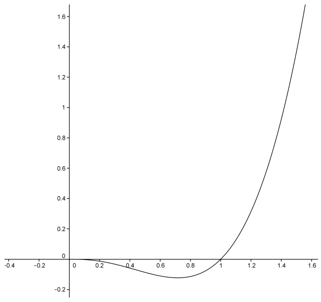
1. La funzione $f(x) = x^3 \ln x$ è definita per $x > 0$; positiva per $x > 1$, negativa per $x < 1$. Alla frontiera dell'insieme di definizione, abbiamo:

$$\lim_{x\to 0} x^3 \ln x = 0, \qquad \lim_{x\to+\infty} x^3 \ln x = +\infty$$

Da $f'(x) = 3x^2 \ln x + x^2 = x^2(3\ln x + 1) > 0$ per $x > e^{-1/3}$, abbiamo che il punto $x_0 = \dfrac{1}{\sqrt[3]{e}}$ è un minimo. Abbiamo anche $\lim_{x\to 0} f'(x) = 0$.

Da $f'(x) = 6x \ln x + 5x = x(6\ln x + 5) > 0$ per $x > e^{-5/6}$, abbiamo che il punto di flesso è in $\dfrac{1}{\sqrt[6]{e^5}}$

Per quanto riguarda le espressioni numeriche arrotondate richieste, abbiamo per la prima $0,717$ e $0,435$ per la seconda.



2. Il punto P ha coordinate $(1, 0)$.
Della parabola $y = ax^2 + bx + c$, sappiamo:

$$\begin{cases} c = 0 & (\textit{passaggio per l'origine}) \\ a + b = 0 & (\textit{passaggio per } P) \\ 2a + b = 1 & (\textit{uguaglianza delle derivate in } P) \end{cases}$$

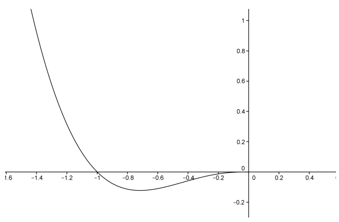
Otteniamo allora $a = 1$, $b = -1$, $c = 0$ e l'equazione $y = x^2 - x$.

3. L'area di R è data da $\int_0^1 -x^3 \ln x \, dx$ dove l'integrale non pone problemi in quanto $f(x)$ è funzione limitata per $x \to 0$ e il cambiamento di segno intercorso sulla funzione integranda è dovuto al fatto che essa nell'intervallo $(0, 1)$ è negativa:

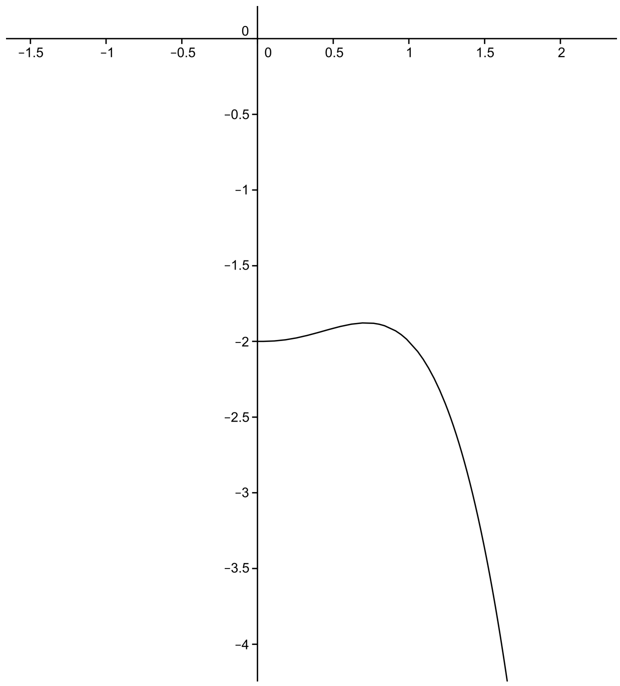
$$\int_0^1 -x^3 \ln x \, dx = -\left[\frac{x^4}{4} \ln x\right]_0^1 + \int_0^1 \frac{x^3}{4} \, dx = \left[\frac{-x^4}{4} \ln x + \frac{x^4}{16}\right]_0^1 = \frac{1}{16}$$

La misura di R in mm^2 è data allora da $\dfrac{10\,000}{16}\, mm^2 = 625\, mm^2$.

4. La curva simmetrica di γ rispetto all'asse y ha per equazione $y = -x^3 \ln(-x)$



La curva simmetrica di γ rispetto alla retta di equazione $y = -1$ ha per equazione $y = -x^3 \ln x - 2$



0
−1.5
−1
−0.5
0
0.5
1
1.5
2
−0.5
−1
−1.5
−2
−2.5
−3
−3.5
−4

Questionari PNI

1) Se h è la misura dell'altezza relativa al lato di misura 3, possiamo sempre scrivere h=2 sin(α) (dove α è l'angolo formato dai lati di misura, rispettivamente, 2 e 3). Abbiamo allora l'uguaglianza:

$$\frac{3 \cdot 2 \sin(\alpha)}{2} = 3$$

da cui segue $\alpha=\pi/2$. Il triangolo è rettangolo e il terzo lato (ipotenusa) misura $\sqrt{13}$

2) Derivando la funzione data e calcolando i valori della sua derivata in x=1 e x=2, otteniamo:

$$\begin{cases} f'(1) - 2f'(2) = 5 \\ f'(2) - 2f'(4) = 7 \end{cases}$$

Dal sistema, ricaviamo $f'(1) - 4f'(4) = 19$

3) La retta passante per B e avente la massima distanza da A è quella perpendicolare alla retta congiungente A con B. Quest'ultima ha coefficiente angolare $m = \frac{7}{8}$. La perpendicolare richiesta ha equazione $y + 8 = -\frac{8}{7}(x + 6)$ ovvero $y = -\frac{8}{7}x - \frac{104}{7}$

4) Siano a e b rispettivamente i lati delle basi minore e maggiore del tronco di piramide e sia H l'altezza della piramide di cui di cui si considera il tronco.

Si ha: $\frac{\mathrm{H}}{\mathrm{b}} = \frac{\mathrm{h}}{\mathrm{b\text{-}a}} \Rightarrow H = \frac{\mathrm{hb}}{\mathrm{b\text{-}a}}$ e anche: $\frac{\mathrm{H\text{-}h}}{\mathrm{a}} = \frac{\mathrm{h}}{\mathrm{b\text{-}a}} \Rightarrow H - h = \frac{\mathrm{ha}}{\mathrm{b\text{-}a}}$.

Il volume del tronco di piramide è dato dalla differenza:

$$V = \frac{b^2 H}{3} - \frac{a^2(H-h)}{3} \Rightarrow \frac{h}{3}\frac{\left(b^3 - a^3\right)}{b\text{-}a} = \frac{h}{3}\left(b^2 + ab + a^2\right)$$

5) La risposta è quasi esatta pur di considerare accrescimenti lineari cosi bassi che le loro potenze siano trascurabili. Infatti, se la dilatazione di un corpo avviene nella percentuale *p* in tutte le direzioni, il fattore dilatante lineare è $(1+p)$; quello superficiale $(1+p)^2$; quello di volume $(1+p)^3$.

Dire che la superficie si accresce in proporzione doppia e il volume in proporzione tripla rispetto all'accrescimento lineare significa considerare i termini principali dell'incremento e trascurare quelli che dipendono da potenze superiori alla prima: $(1+p)^2 = 1 + 2p + (p^2)$, $(1+p)^3 = 1 + 3p + (3p^2 + p^3)$.

Se le dimensioni della valigia sono *a, b, c* e ciascuna dimensione viene aumentate della percentuale *p*, il volume della valigia passa da *abc* a: $(a+pa)(b+pb)(c+pc) = abc\ (1+p)^3$.

Per *p* = 1/10 $(1+p)^3 = 1{,}331$ e l'aumento è di circa il 33%; per *p* = 2/10 $(1+p)^3 = 1{,}728$ e l'aumento è di circa il 73%; per *p* = 25/100 $(1+p)^3 = 1{,}953$ si ha quasi un raddoppio del volume.

6) La prima permutazione (in ordine crescente) è 1234567.

Permutando le ultime due cifre abbiamo un altro allineamento; permutando le ultime tre cifre abbiamo altri $2 \cdot 2! = 4$ allineamenti; permutando le ultime quattro cifre, abbiamo $3 \cdot 3! = 18$ allineamenti; permutando le

ultime cinque cifre, abbiamo $4 \cdot 4! = 96$ allineamenti; permutando le ultime sei cifre, abbiamo $5 \cdot 5! = 600$ allineamenti. In tutto, fino a questo punto, abbiamo ricavato 720 allineamenti.
Anche gli allineamenti che hanno in prima posizione il “2” sono 720: in tutto, finora, ne abbiamo ricavati 1440, il 1441.esimo è dunque il primo (sempre in ordine crescente) che ha come prima cifra il “3”: 3124567. Il 5036.esimo allineamento è il quartultimo: 7654132.

7) Per calcolare la probabilità cercata, assumendo che le due persone siano estratte “senza reimmissione”, si può usare la distribuzione Ipergeometrica. Quindi, indicato con A l’evento di cui si cerca la probabilità, si ha:

Prob(A) = $\frac{\frac{6!}{0!6!}\frac{4!}{2!2!}}{\frac{10!}{8!2!}} = \frac{2}{15}$.

Equivalentemente, usando le probabilità subordinate e indicando con A_1 l’evento “la prima persona estratta non ha occhi azzurri” e con A_2 l’evento “la seconda persona estratta non ha occhi azzurri”, si può calcolare la probabilità di A come segue:

Prob(A)=Prob(A_2|A_1)*Prob(A_1)=3/9*4/10=2/15.

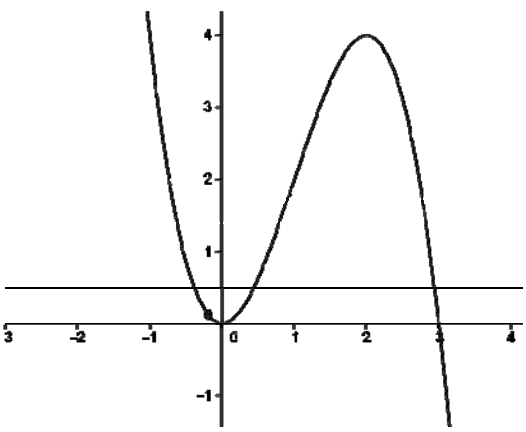
8) Si ponga per comodità x-π=t. Abbiamo allora:

$$\lim_{x\to\pi}\frac{e^{\sin(x)}-e^{\sin(\pi)}}{x-\pi} = \lim_{t\to 0}\frac{e^{\sin(t+\pi)}-1}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{e^{-\sin(t)}-1}{t} =$$

$$\lim_{t\to 0}\frac{e^{-t}-1}{t} = -1$$

9) Intuitivamente, ha ragione Luisa perché l’insieme dei numeri razionali ha la potenza del numerabile (i numeri razionali sono ordinabili in una successione) mentre gli irrazionali sono più che numerabili.

10) Dal grafico di f(x)= $x^2(3-x)$, si deduce che l’equazione data ammette due soluzioni distinte nell’intervallo designato per k∈[0,f(2)=4).



La maggiore delle soluzioni si trova nell’ intervallo [2,3]. La cerchiamo usando il metodo iterativo (punto fisso). Dall’equazione x^2(3-x)-3=0, ricaviamo $x = -\frac{3}{x^2} + 3$. Ponendo x_0=3, otteniamo $x_1 = -\frac{3}{x_0^2} + 3 = \frac{8}{9}$=

Ripetiamo il procedimento: $x_2 = -\frac{3}{x_1^2} + 3 = \frac{125}{64}$~2,578125.
Iterandolo, dopo cinque passaggi complessivi, si ottiene x_5=2,5343 (corretta alla seconda cifra decimale).