Correzione della simulazione di seconda prova di matematica del 25 febbraio 2015

PROBLEMA 1: Una collisione tra meteoriti

1] La curva geometrica rappresentata dal grafico nel piano *t-v* è una parabola con asse di simmetria parallelo all'asse *v* la cui equazione è del tipo $v(t) = at^2 + bt + c$ oppure, note le coordinate del vertice (t_V, v_V), del tipo $v - v_V = a(t - t_V)^2$ (con a<0 poichè è convessa ovvero ha la concavità volta verso il basso).
La sua equazione si determina sostituendo le coordinate del vertice V(5,30)
$v - 30 = a\cdot(t-5)^2$

$$v - 30 = a\ (t-5)^2 \qquad \textbf{(1)}$$

e imponendo il passaggio per il punto A(0,5).
$\left(5 - 30 = a\cdot(0-5)^2, a\right)$ si ottiene

$$-1 \qquad \textbf{(2)}$$

Quindi l'equazione della velocità in funzione del tempo (con $t \geq 0$) del primo meteorite rappresentata nel grafico è:
$v - 30 = -1\cdot(t-5)^2$

$$v - 30 = -(t-5)^2 \qquad \textbf{(3)}$$

$$v - 30 = -t^2 + 10\,t - 25 \qquad \textbf{(4)}$$

$$v = -t^2 + 10\,t + 5 \qquad \textbf{(5)}$$

2] La funzione $s(t) = -\frac{1}{3}t^3 + 5\,t^2 + 5\,t$ che apppare sul monitor rappresenta la legge oraria del moto del primo meteorite se la sua funzione derivata prima coincide con la funzione v(t) ricavata al punto **1**.
$s'(t) = \frac{d}{d\,t}\left(-\frac{1}{3}t^3 + 5\,t^2 + 5\,t\right)$

$$D(s)(t) = -t^2 + 10\,t + 5 \qquad \textbf{(6)}$$

Poichè l'espressione della funzione **(5)** coincide con la **(6)**, si è verificato che $s(t) = -\frac{1}{3}t^3 + 5\,t^2 + 5\,t$ che apppare sul monitor rappresenta la legge oraria del moto del primo meteorite.

3] Supposto che le traiettorie siano complanari in un piano x-y e abbiano equazione f(x,y)=0 e g(x,y)=0, l'urto avviene se nello stesso istante i due meteoriti si trovano nello stesso punto di coordinate $U(x_U,y_U)$ in cui le curve delle traiettorie s'intersecano ovvero se l'equazione $f(x_U,y_U)=g(x_U,y_U)$ è identicamente soddisfatta.

4] La legge oraria del primo meteorite cambia nell'istante corrispondente al punto d'intersezione delle due leggi orarie (altrimenti si verificherebbe un salto temporale)
$-\frac{1}{3}\cdot t^3 + 5\cdot t^2 + 5\cdot t = 2\cdot t^2 + \frac{5}{3}\cdot t$ ottenendo le soluzioni

$$0,\ 10,\ -1 \qquad \textbf{(7)}$$

Solo l'istante t=10 s è accettabile, sono da scartare tempi negativi e l'istante iniziale t=0 s in cui il primo meteorite parte.

5] La legge oraria del primo meteorite nell'intervallo tra 0 e t_{urto} ovvero tra 0 s e 30 s è una funzione definita a tratti:

$$h(t) := \begin{cases} -\frac{1}{3}\cdot t^3 + 5\cdot t^2 + 5\cdot t & 0 \le t \le 10 \\ 2\cdot t^2 + \frac{5}{3}\cdot t & 10 < t \le 30 \end{cases} :$$

h(t) è una funzione continua in t=10 infatti:

$$\lim_{t \to 10^-} \left(-\frac{1}{3}\cdot t^3 + 5\cdot t^2 + 5\cdot t \right) = \lim_{t \to 10^+} \left(2\cdot t^2 + \frac{5}{3}\cdot t \right)$$

$$\frac{650}{3} = \frac{650}{3} \tag{8}$$

La funzione passa per il punto I(10,650/3) ≈ (10,200)

Per rappresentare h(t) studio prima la funzione $s1(t) = -\frac{1}{3}t^3 + 5t^2 + 5t$ in [0,10] e poi considero la funzione $s2(t) = 2\cdot t^2 + \frac{5}{3}\cdot t$ in]10,30].

$0 = -\frac{1}{3}t^3 + 5t^2 + 5t$ ottenendo le soluzioni

$$0,\ \frac{15}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{285},\ \frac{15}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{285} \tag{9}$$

in [0,10] la funzione si annulla solo in t=0

$-\frac{1}{3}t^3 + 5t^2 + 5t > 0$

in]0,10] la funzione è positiva.

La sua derivata prima ha equazione $s' = -t^2 + 10t + 5$ in [0,10]

$0 = -t^2 + 10t + 5$ ottenendo

$$5 + \sqrt{30},\ 5 - \sqrt{30} \tag{10}$$

in [0,10] s' non si annulla.

$-t^2 + 10t + 5 > 0$ ottenendo

$$\{t < 5 + \sqrt{30},\ 5 - \sqrt{30} < t\} \tag{11}$$

in [0,10] s' è sempre positiva quindi la funzione è sempre crescente.

La sua derivata seconda ha equazione $s'' = -2\cdot t + 10$ in [0,10]

$0 = -2\cdot t + 10$

$$5 \tag{12}$$

in [0,10] si annulla per t=5.

$-2\cdot t + 10 > 0$ *ottenendo*

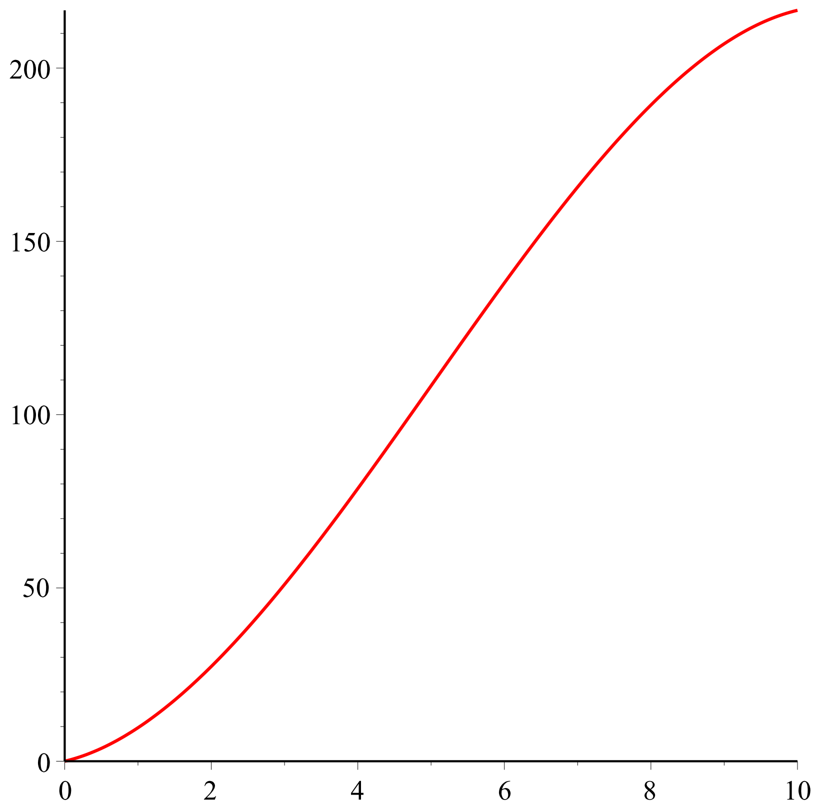
$$\{t < 5\} \tag{13}$$

in [0,5[s'' è positiva quindi la funzione volge la concavità verso l'alto, in]5,10] s'' è negativa quindi la funzione volge la concavità verso il basso in t=5 c'è un punto di flesso la cui ordinata è

$sF = \left(t = 5, -\frac{1}{3}\cdot t^3 + 5\cdot t^2 + 5\cdot t\right)$

$$sF = \frac{325}{3} \tag{14}$$

Disegnamola

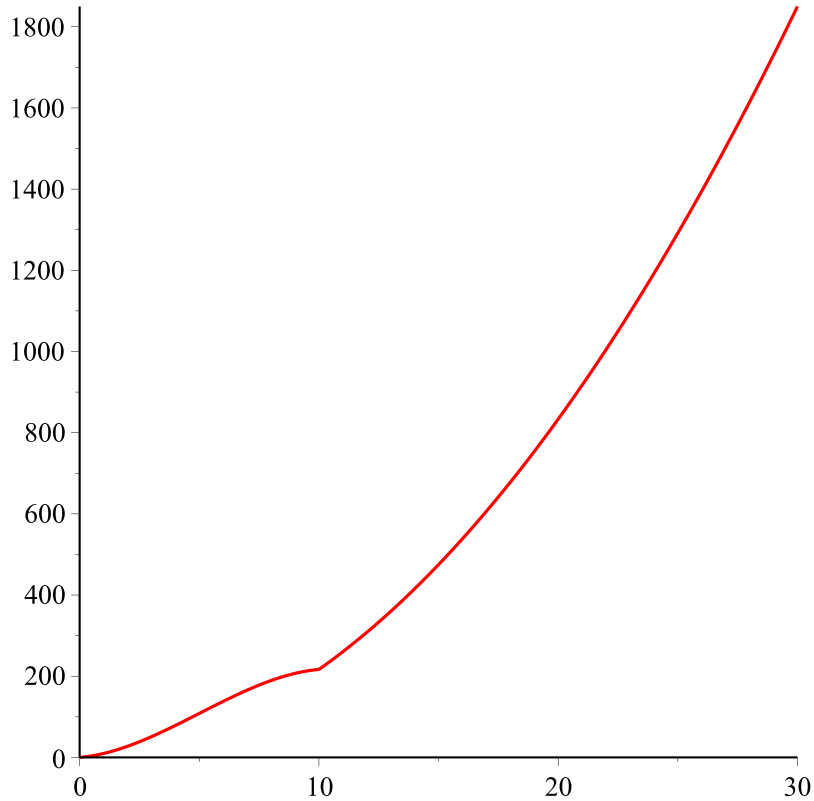


Per la funzione $s2(t) = 2\cdot t^2 + \frac{5}{3}\cdot t$ in]10,30] non è necessario eseguire uno studio di funzione poichè si tratta di un arco di parabola (con asse parallelo all'asse s) con concavità verso l'alto passante per il punto I sopra determinato e G (30,1850).

$s = \left(t = 30,\ 2\cdot t^2 + \frac{5}{3}\cdot t\right)$

$$s = 1850 \tag{15}$$

La legge oraria del primo meteorite ha quindi grafico:



Si osserva in particolare che la suddetta funzione è continua in [0,30], come già verificato sopra.
La derivata prima di h(t) è:

$$h'(t) = \begin{cases} -t^2 + 10\,t + 5 & 0 \le t < 10 \\ 4\cdot t + \dfrac{5}{3} & 10 < \mathrm{t} \le 30 \end{cases}$$

In t=10 vi è un punto di non derivabilità (punto angoloso) poichè le derivate destra e sinistra sono diverse e finite.

$$\lim_{t \to 10^-} \left(-t^2 + 10\cdot t + 5 \right)$$

$$5 \tag{16}$$

$$\lim_{t \to 10^+} \left(4\cdot t + \frac{5}{3} \right)$$

$$\frac{125}{3} \tag{17}$$

altrove la funzione è derivabile.

Problema 2: Un mappamondo prezioso

Problema 2: Un mappamondo prezioso
Lavori in un laboratorio d'arte vetraria e il responsabile del museo civico della tua città ti chiede di progettare un espositore avente forma conica che possa contenere un prezioso e antico mappamondo. Il mappamondo ha raggio R e l'espositore deve essere ermeticamente chiuso, per impedire che il mappamondo prenda polvere.

Il tuo collega Mario dice che, per costruire l'espositore, si potrebbe utilizzare il quarzo ialino ma, data la preziosità del materiale, per risparmiare è necessario determinarne le dimensioni ottimali. Inoltre per proteggere l'espositore dalla polvere decidete di ricoprirlo con una sottile pellicola trasparente di nuova generazione e piuttosto costosa.

1. Trascurando lo spessore dell'espositore e attraverso un'opportuna modellizzazione geometrica, determina l'altezza h e il raggio di base r dell'espositore affinché sia minima la sua superficie totale, allo scopo di utilizzare una quantità minima di pellicola.
2. Fornisci una spiegazione adeguata e convincente del procedimento seguito, eventualmente anche con rappresentazioni grafiche.

Ora tu e Mario dovete scegliere la pellicola da sistemare sulla superficie esterna dell'espositore. La scelta va fatta tra due pellicole che hanno lo stesso costo unitario ma diverse proprietà: la prima ogni anno perde il 3% della resistenza all'usura che ha a inizio anno, mentre la seconda ogni anno perde il 2% della resistenza all'usura iniziale.

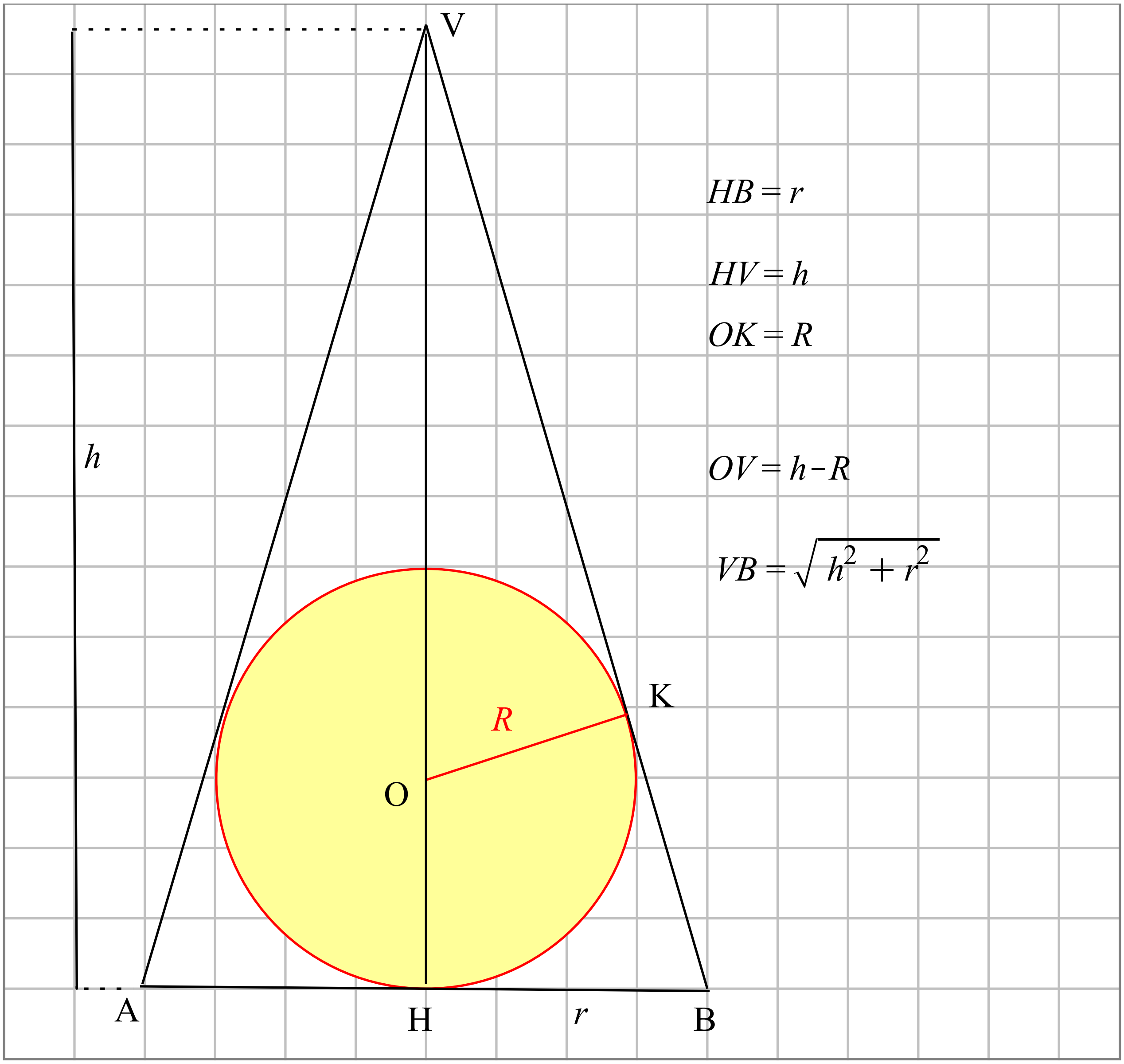
3. Aiuta Mario nel capire quale pellicola convenga scegliere in funzione della durata, tenendo conto del fatto che entrambe hanno la stessa resistenza di partenza e che una pellicola va cambiata quando la sua resistenza all'usura risulta inferiore al 30% della sua resistenza di partenza.

[1] Ricorda che la superficie totale S di un cono è data dall'espressione: $\mathbf{S = \pi r^2 + \pi r\sqrt{r^2 + h^2}}$

RISOLUZIONE

Prima parte

RAPPRESENTAZIONE GRAFICA



Espressione da rendere minima

$$\boldsymbol{S = \pi r^2 + \pi r \sqrt{r^2 + h^2}}$$

Dal grafico si deduce facilmente che deve essere $h > 2R$

I triangoli HBV e OKV sono simili avendo congruenti rispettivamente gli angoli retti $B\widehat{H}V$ e $O\widehat{K}V$
e l'angolo comune $H\widehat{V}B$, pertanto sussiste la seguente proporzione tra i lati:
$\dfrac{OV}{OK} = \dfrac{BV}{HB}$ e quindi tra le loro misure

$$R1 := \frac{h-R}{R} = \frac{\sqrt{r^2+h^2}}{r}$$

Ricaviamo dalla relazione R1, r^2 in funzione di h e di R

$$1 - \frac{2h}{R} + \frac{h^2}{R^2} = \frac{h^2}{r^2} + 1 \tag{2.1.1}$$

$$r^2 = -\frac{R^2 h}{2R - h} \tag{2.1.2}$$

Riscriviamo in forma ordinata:

$$\boldsymbol{r^2 = \frac{R^2 h}{h - 2R}}$$

Ricaviamo dalla relazione R1, $\sqrt{r^2+h^2}$

$$\sqrt{h^2+r^2} = -\frac{(-h+R)\,r}{R} \tag{2.1.3}$$

Riscriviamo in forma ordinata:

$$\boldsymbol{\sqrt{h^2+r^2} = \frac{(h-R)\,r}{R}} \tag{2.1.4}$$

Sostituiamo l'espressione ottenuta 2.1.4 nella nella formula dell'area S

$$S = \pi r^2 + \frac{\pi r^2 (h-R)}{R} \tag{2.1.5}$$

Riduciamo ad una sola frazione il 2° membro:

$$S = \frac{\pi r^2 h}{R} \tag{2.1.6}$$

Si ottiene per l'area S sostituendo in essa $r^2 = \frac{R^2 h}{h-2R}$ precedentemente calcolato si ha:

$$S = \frac{\pi h}{R} \frac{R^2 h}{h - 2R}$$

$$S = \frac{\pi R h^2}{h - 2R} \tag{2.1.7}$$

Condizione di esistenza
S non esiste per h=2R

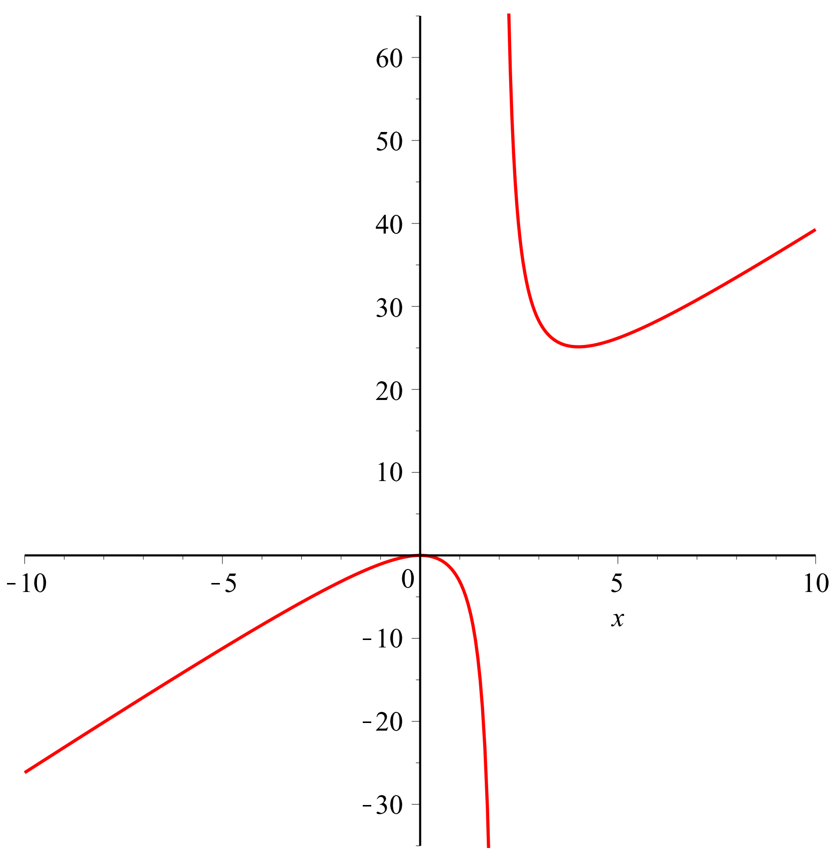
<u>Nello studio successivo, possiamo scegliere il raggio R come unità di misura degli assi, porre $h = x$ ottenendo la funzione</u>

$$\frac{\pi x^2}{x - 2}$$

$$x \rightarrow \frac{\pi x^2}{x - 2} \tag{2.1.8}$$

Si tratta di una funzione algebrica razionale fratta del 2° ordine con punto di discontinuità in $x = 2$, in particolare il grafico è quello di un'iperbole rototraslata.

Disegnamola



<u>**Dal grafico si evince che si ha il minimo per $x = 4$ ossia per $h = 4\,R$**</u>

Verifichiamolo calcolando e studiando la derivata prima y1:

$$\frac{2\,\pi\,x}{x-2} - \frac{\pi\,x^2}{(x-2)^2} \tag{2.1.9}$$

$$\frac{\pi\,x\,(x-4)}{(x-2)^2} \tag{2.1.10}$$

ponendo y1 = 0 si ottiengono i valori :

$$0,\ 4 \tag{2.1.11}$$

studiando il segno y1>0 si ottiene che la funzione è crescente per $-\infty < x < 0, 0 < x < \infty$ **e decrescente per** $0 < x < 4$ **e stazionaria in x=0 (punto di max relativo) e in x=4 (punto di min relativo)**

Possiamo concludere con certezza che si ha il minimo in $\underline{x = 4}$ **ossia per** $\underline{h = 4R}$

Calcoliamo il valore di r per cui la superficie è minima:

Da $r^2 = \dfrac{R^2 h}{h - 2R}$ si ha

$$r^2 = \frac{R^2 (4R)}{(4R) - 2R}$$

$$r^2 = 2R^2 \qquad (2.1.12)$$

e infine

$$r = R\sqrt{2} \qquad (2.1.13)$$

Seconda parte

<u>Usura per la prima pellicola</u>

Posto R la resistenza iniziale all'usura

alla fine del primo anno si ha:

$$R_1 = R - R\frac{3}{100} = R\left(1 - \frac{3}{100}\right)$$

alla fine del secondo anno si ha:

$$R_2 = R_1 - R_1\frac{3}{100} = R_1\left(1 - \frac{3}{100}\right) = R\left(1 - \frac{3}{100}\right)^2$$

alla fine dell'n-esimo anno si ha:

$$R_n = R\left(1 - \frac{3}{100}\right)^n$$

Usura per la seconda pellicola

Posto $\overline{R}$ la resistenza iniziale all'usura

alla fine del primo anno si ha:

$$\overline{R}_1 = \overline{R} - \overline{R}\frac{2}{100}$$

alla fine del secondo anno si ha:

$$\overline{R}_2 = \overline{R} - 2\,\overline{R}\frac{2}{100}$$

alla fine dell'n-esimo anno si ha:

$$\overline{\boldsymbol{R}}_{\mathbf{n}} = \overline{\boldsymbol{R}} - \mathbf{n}\,\overline{\boldsymbol{R}}\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{100}}$$

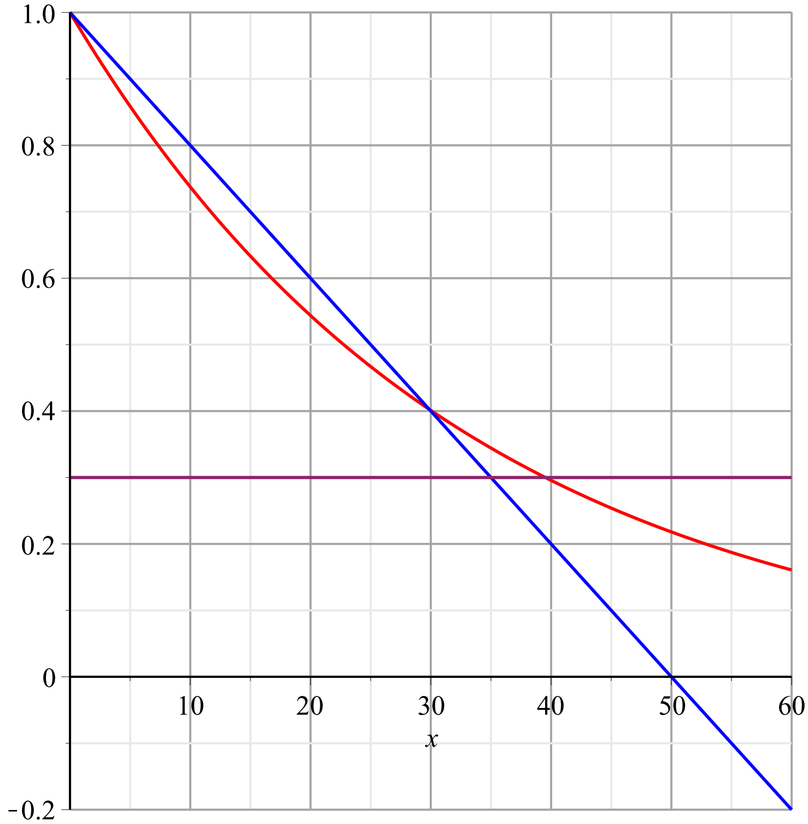
Posto $\overline{R} = R$ cosideriamo le due funzioni associate e consideriamo $u_y = R$ come unità di misura sull'asse y;
consideriamo, inoltre, una terza funzione che misura l'usura minima delle due pellicole:

Resistenza pellicola 1: $y = \left(1 - \frac{3}{100}\right)^x$

Resistenza pellicola 2: $y = 1 - \frac{2}{100}\,x$

Resistenza minima di entrambe: $y = \frac{30}{100}$

Rappresentiamo le tre funzioni definite precedentemente



Dall'analisi del grafico si evince che la resistenza all'usura della **pellicola 2** è maggiore fino a circa 30 anni mentre quella della **pellicola 1** è maggiore da circa 30 anni in poi

Calcoliamo il periodo dopo il quale la pellicola 2 va sostituita

$y = 1 - \frac{2}{100}\,x = \frac{30}{100}$ *si ottiene*

$$\left[\left[x = 35, y = \frac{3}{10}\right]\right] \tag{2.2.1}$$

La pellicola 2 andrebbe sostituita ogni 35 anni
La pellicola 1 andrebbe sostituita ogni circa 39 anni - soluzione ricavabile dal grafico oppure risolvendo l'equazione $y = \left(1 - \frac{3}{100}\right)^{x} = \frac{30}{100}$

In conclusione conviene utilizzare la pellicola 1 ed è necessario sostituirla ogni 39 anni.