

Riesci
a spostare
i fiammiferi in modo
da ottenere 5
quadrati?



Massimo Bergamini
Anna Trifone Graziella Barozzi

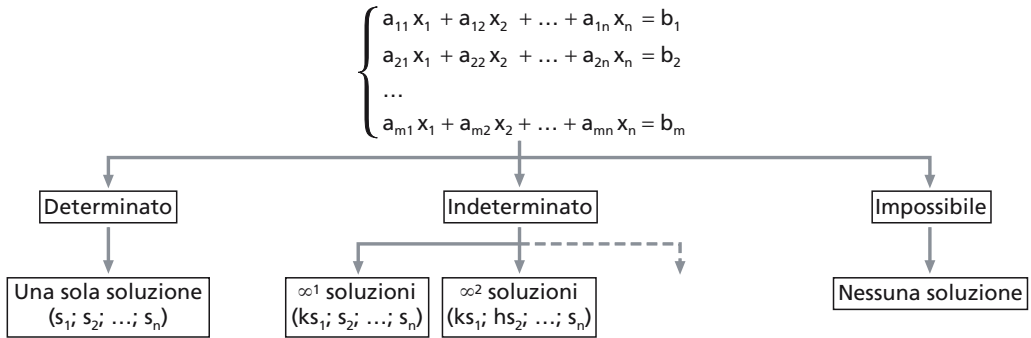
Matematica.blu 2.0

Matrici e sistemi lineari

ZANICHELLI

T

I sistemi di equazioni lineari



Regola di Cramer

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = D \neq 0 \Rightarrow \text{Una sola soluzione: } x_1 = \frac{D_1}{D}; \dots; x_i = \frac{D_i}{D}; \dots; x_n = \frac{D_n}{D} \quad \text{dove } D_i = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & b_1 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & b_2 & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & b_n & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

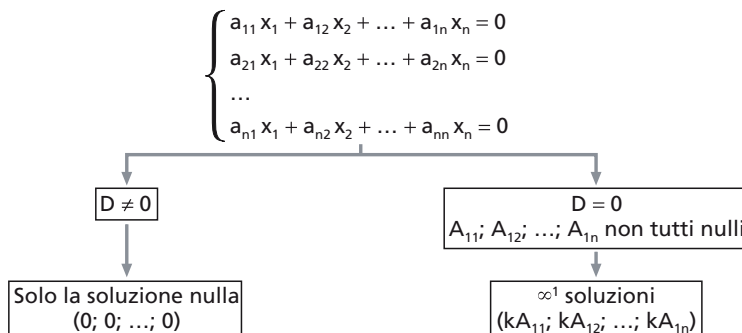
i-esima colonna

Teorema di Rouché-Capelli

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \iff \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}$$

Una o infinite soluzioni
Stessa caratteristica
 $C_i = C_m$

I sistemi lineari omogenei



Massimo Bergamini Anna Trifone Graziella Barozzi

Matematica.blu 2.0

Matrici e sistemi lineari

T

ZANICHELLI

I diritti di elaborazione in qualsiasi forma o opera, di memorizzazione anche digitale su supporti di qualsiasi tipo (inclusi magnetici e ottici), di riproduzione e di adattamento totale o parziale con qualsiasi mezzo (compresi i microfilm e le copie fotostatiche), i diritti di noleggio, di prestito e di traduzione sono riservati per tutti i paesi.
L'acquisto della presente copia dell'opera non implica il trasferimento dei suddetti diritti né li esaurisce.

Per le riproduzioni ad uso non personale (ad esempio: professionale, economico, commerciale, strumenti di studio collettivi, come dispense e simili) l'editore potrà concedere a pagamento l'autorizzazione a riprodurre un numero di pagine non superiore al 15% delle pagine del presente volume. Le richieste per tale tipo di riproduzione vanno inoltrate a

Associazione Italiana per i Diritti di Riproduzione
delle Opere dell'ingegno (AIDRO)
Corso di Porta Romana, n. 108
20122 Milano
e-mail segreteria@aidro.org e sito web www.aidro.org

L'editore, per quanto di propria spettanza, considera rare le opere fuori del proprio catalogo editoriale, consultabile al sito www.zanichelli.it/f_catalog.html.
La fotocopia dei soli esemplari esistenti nelle biblioteche di tali opere è consentita, oltre il limite del 15%, non essendo concorrenziale all'opera. Non possono considerarsi rare le opere di cui esiste, nel catalogo dell'editore, una successiva edizione, le opere presenti in cataloghi di altri editori o le opere antologiche.
Nei contratti di cessione è esclusa, per biblioteche, istituti di istruzione, musei ed archivi, la facoltà di cui all'art. 71 - ter legge diritto d'autore. Maggiori informazioni sul nostro sito: www.zanichelli.it/fotocopie/

Realizzazione editoriale:

- Coordinamento redazionale: Marinella Lombardi
- Redazione: Valentina Franceschi, Marinella Lombardi
- Collaborazione redazionale: Massimo Arzenzoni, Parma
- Segreteria di redazione: Deborah Lorenzini
- Progetto grafico: Byblos, Faenza
- Progetto grafico delle pagine V-VIII: Roberto Marchetti
- Composizione e impaginazione: Litoincisa, Bologna
- Ricerca iconografica e realizzazione delle aperture di capitolo e di *Realtà e modelli*: Byblos, Faenza
- Disegni: Graffito, Cusano Milanino
- Correzione di bozze: T2, Bologna

Contributi:

- Stesura delle aperture: Daniela Cipolloni (*Il percorso più breve, Bloccare le e-mail di spam, Come ordina Google le pagine?, I calcoli per una dieta sana ed equilibrata*), Daniele Gouthier (*Rotolare per misurare, I pannelli solari*)
- Stesura delle schede di Esplorazione: Fulvia Baccarani (*Uno, cento, mille racconti*), Chiara Ballarotti (*Arte al cubo*), Daniela Cipolloni (*Le fibre ottiche, Siamo soli nell'Universo?, Scienza delle costruzioni, Trasformazioni geometriche e tassellazioni*), Chiara Manzini (*Astri, seni, coseni, tangenti*), Elisa Menozzi (*L'inafferrabile pi greco, Da quantità silvestri a numeri immaginari, Design, cinema e videogiochi*)
- Stesura dei testi e degli esercizi del *Laboratorio di matematica*: Antonio Rotteglia
- Stesura e revisione degli esercizi in lingua inglese: Andrea Betti
- Revisioni dei testi e degli esercizi: Chiara Ballarotti, Luca Malagoli, Elisa Menozzi, Monica Prandini
- Rilettura dei testi: Marco Giusiano, Luca Malagoli, Francesca Anna Riccio
- Risoluzione degli esercizi: Silvano Baggio, Francesco Benvenuti, Davide Bergamini, Angela Capucci, Elisa Capucci, Lisa Cecconi, Elisa Garagnani, Daniela Giorgi, Erika Giorgi, Cristina Imperato, Francesca Incensi, Chiara Lugli, Francesca Lugli, Elisa Menozzi, Monica Prandini, Francesca Anna Riccio, Elisa Targa, Ambra Tinti
- Stesura degli esercizi: Graziella Barozzi, Anna Maria Bartolucci, Davide Bergamini, Cristina Bignardi, Francesco Biondi, Lisa Cecconi, Chiara Cinti, Paolo Maurizio Dieghi, Daniela Favaretto, Rita Fortuzzi, Ilaria Fragni, Lorenzo Ghezzi, Chiara Lucchi, Mario Luciani, Chiara Lugli, Francesca Lugli, Armando Magnavacca, Elisa Menozzi, Luisa Morini, Monica Prandini, Tiziana Raparelli, Laura Recine, Daniele Ritelli, Antonio Rotteglia, Giuseppe Sturiale, Renata Tolino, Maria Angela Vitali, Alessandro Zagnoli, Alessandro Zago, Lorenzo Zordan
- Stesura dei problemi di *Realtà e modelli*: Daniela Boni, Maria Falivene, Nadia Moretti
- Revisione didattica del testo (*Diary revision*): Eleonora Basile, Maria Alberta Bulgaro, Laura Caliccia, Anna Maria Logoteta, Alvisia Marcantonio, Lucia Nasoni, Mariapia Riva

Derive è un marchio registrato della Soft Warehouse Inc.
Excel è un marchio registrato della Microsoft Corp

L'intera opera è frutto del lavoro comune di Massimo Bergamini e Anna Trifone. Hanno collaborato alla realizzazione di questo volume Davide Bergamini e Enrico Bergamini.

Copertina:

- Progetto grafico: Miguel Sal & C., Bologna
- Realizzazione: Roberto Marchetti
- Immagine di copertina: Artwork Miguel Sal & C., Bologna

Prima edizione: gennaio 2011

L'impegno a mantenere invariato il contenuto di questo volume per un quinquennio (art. 5 legge n. 169/2008) è comunicato nel catalogo Zanichelli, disponibile anche online sul sito www.zanichelli.it, ai sensi del DM 41 dell'8 aprile 2009, All. 1/B.



File per diversamente abili

L'editore mette a disposizione degli studenti non vedenti, ipovedenti, disabili motori o con disturbi specifici di apprendimento i file pdf in cui sono memorizzate le pagine di questo libro. Il formato del file permette l'ingrandimento dei caratteri del testo e la lettura mediante software screen reader.

Le informazioni su come ottenere i file sono sul sito www.zanichelli.it/diversamenteabili

Suggerimenti e segnalazione degli errori

Realizzare un libro è un'operazione complessa, che richiede numerosi controlli: sul testo, sulle immagini e sulle relazioni che si stabiliscono tra essi. L'esperienza suggerisce che è praticamente impossibile pubblicare un libro privo di errori. Saremo quindi grati ai lettori che vorranno segnalarceli. Per segnalazioni o suggerimenti relativi a questo libro scrivere al seguente indirizzo:

lineauno@zanichelli.it

Le correzioni di eventuali errori presenti nel testo sono pubblicate nella sezione *errata corrige* del sito dell'opera (www.online.zanichelli.it/bergaminiTriennio)

Zanichelli editore S.p.A. opera con sistema qualità certificato CertiCarGraf n. 477 secondo la norma UNI EN ISO 9001:2008

SOMMARIO



Quale criterio utilizza Google per ordinare le pagine?

► La risposta a pag. 1259



Che tipo di calcoli fa un dietologo per mettere a punto una dieta sana ed equilibrata?

► La risposta a pag. 1320

Realtà e modelli

CAPITOLO 18

LE MATRICI E I DETERMINANTI

1. Le matrici	1234	1266
2. Le matrici quadrate	1237	1266
3. Le operazioni con le matrici	1238	1267
4. I determinanti	1243	1274
5. Le proprietà dei determinanti	1247	1278
6. Il rango	1251	1284
7. La matrice inversa	1252	1288
ESPLORAZIONE Design, cinema e videogiochi	1254	
8. Alcune applicazioni delle matrici	1255	1290
LABORATORIO DI MATEMATICA Le matrici e i determinanti		1260
■ Realtà e modelli		1295
■ Verso l'esame di Stato		1296

CAPITOLO 19

I SISTEMI DI EQUAZIONI LINEARI

1. Che cosa sono i sistemi lineari	1300	1326
2. Il metodo della matrice inversa	1302	1327
3. La regola di Cramer	1304	1329
4. Il metodo di riduzione	1306	1331
5. Il teorema di Rouché-Capelli	1313	1336
6. I sistemi lineari omogenei di n equazioni in n incognite	1315	1343
ESPLORAZIONE Scienza delle costruzioni	1319	
LABORATORIO DI MATEMATICA I sistemi di equazioni lineari		1321
■ Realtà e modelli		1349
■ Verso l'esame di Stato		1350

TEORIA	ESERCIZI
V	

FONTI DELLE ILLUSTRAZIONI

V: Ryan Carter/Shutterstock;

VI: Molodec /Shutterstock;

VII: Allison/Shutterstock;

VIII: Irin-k /Shutterstock;

1254: Franck Boston/Shutterstock;

1295 (a): Dragon_fang/Shutterstock;

1295 (b): Hannamariah/Shutterstock;

1299, 1320 (a): Freeshot/Shutterstock;

1299, 1320 (b): Stefano Tiraboschi /Shutterstock;

1320 (c): Mike Flippo/Shutterstock;

1320 (d): Joe Gough/Shutterstock;

1320 (e): Mars Evis/Shutterstock;

1320 (f): Alexander Kalina/Shutterstock;

1349 (a): Dmitry Skutin/Shutterstock;

1349 (b): @cam /Shutterstock.

Realtà e modelli



Quali sono le caratteristiche di un modello matematico? Quale rapporto c'è fra il modello e la realtà?

Le caratteristiche di un modello

● Più fenomeni, un modello



Diversi fenomeni, come il suono prodotto dalla corda di una chitarra pizzicata, un terremoto, le onde prodotte da un sasso lanciato in uno stagno, l'emissione di luce, hanno punti in comune e possono essere studiati mediante uno stesso modello, quello dell'oscillatore armonico.

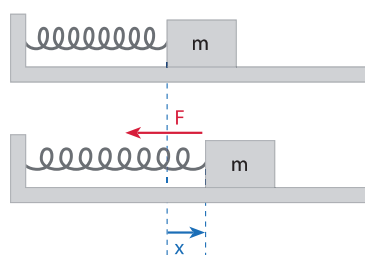
● La costruzione del modello

Per costruire il modello dell'oscillatore armonico, consideriamo l'oscillazione di una massa m attaccata a una molla come in figura.

Se la molla viene deformata, allungandola o comprimendola, del vettore \vec{x} , la massa è sottoposta a una forza elastica \vec{F} che ha stessa direzione di \vec{x} , verso contrario e intensità direttamente proporzionale a x , secondo una costante k che dipende dalle caratteristiche della molla. Quindi: $\vec{F} = k\vec{x}$.

Sappiamo anche che vale la legge di Newton: $\vec{F} = m\vec{a}$, dove a è l'accelerazione. Supponiamo inoltre che:

- non ci sia attrito fra la massa, l'aria e il piano d'appoggio;
- la massa della molla sia trascurabile;
- in prima approssimazione e su intervalli di tempo sufficientemente brevi, la massa m si muova di moto uniformemente accelerato (l'errore che si commette adottando questa ipotesi è tanto minore quanto più è breve l'intervallo di tempo considerato).



L'ipotesi che il moto sia uniformemente accelerato per brevi intervalli serve soltanto per costruire un modello che utilizzi gli strumenti di calcolo che conosci. L'analisi matematica mette a disposizione strumenti che permettono di evitare questa ipotesi semplificatrice.

● Le previsioni del modello

Il modello costruito, fissata la posizione e la velocità iniziali, x_0 e v_0 , permette di ottenere la posizione x_1 , la velocità v_1 e l'accelerazione a_1 della massa dopo un intervallo di tempo Δt . Conoscendo x_1 , v_1 e a_1 è poi possibile trovare x_2 , v_2 e a_2 dopo un secondo intervallo Δt , e così via.

Tenendo conto che:

$$a = \frac{F}{m} = -\frac{kx}{m}$$

e applicando le formule del moto uniformemente accelerato ricaviamo:

$$x_{n+1} = x_n + v_n \cdot \Delta t + \frac{1}{2} \left(-\frac{k}{m} \right) x_n (\Delta t)^2; \quad v_{n+1} = v_n + \left(-\frac{k}{m} \right) x_n \cdot \Delta t; \quad a_n = \left(-\frac{k}{m} \right) x_n.$$

in laboratorio

Puoi anche realizzare un esperimento in laboratorio per studiare le oscillazioni.

Se nel laboratorio della tua scuola non c'è una rotaia a cuscinetti d'aria, è più semplice realizzare il moto nel caso di una molla appesa in verticale, con attaccato un corpo a una estremità.

Attività

- Nell'ipotesi che $x_0 = 1$ m, $v_0 = 0$ m/s, $m = 0,1$ kg, $k = 40$ N/m e considerando $\Delta t = 1$ s, scrivi i primi valori delle successioni relative a x , v , a calcolando manualmente $x_1, x_2, x_3, v_1, v_2, v_3, a_0, a_1, a_2, a_3$.
- Considerato, per esempio, $\Delta t = 1$ s e un numero adeguato di intervalli, con l'aiuto di un foglio elettronico traccia i grafici di x , v e a in funzione di t .
- Che analogie e differenze noti?

● Ipotesi semplificatrici e limiti di un modello

Un modello matematico è l'espressione di quanto si conosce e si ritiene interessante di una situazione o di un problema. La scelta delle variabili significative da studiare e di quelle che invece si possono trascurare è la prima importante operazione nella costruzione del modello. Per esempio, nell'oscillatore armonico si è deciso di trascurare l'attrito dell'aria e la massa della molla. Naturalmente, proprio per la scelta attuata, ogni modello ha limiti di applicazione.

Per sottolineare l'inutilità di un modello che non faccia ipotesi semplificatrici, è significativo questo passo tratto da *L'artefice* di Borges, in cui si parla dell'Arte della Cartografia in un Impero:

«[...] i Collegi dei Cartografi eressero una Mappa dell'Impero, che uguagliava in grandezza l'Impero e coincideva puntualmente con esso. Meno Dedite allo Studio della Cartografia, le Generazioni Successive compresero che quella vasta Mappa era Inutile e non senza Empietà l'abbandonarono alle Inclemenze del Sole e degli Inverni.»

(in Jorge Luis Borges, *Tutte le opere*, Mondadori, 1984)



● Linguaggio matematico e previsioni

L'uso del linguaggio matematico è fondamentale per passare da una descrizione qualitativa a una quantitativa della situazione e per fare previsioni accurate. Nell'oscillatore armonico avresti potuto affermare, con considerazioni qualitative, che la massa oscilla tra due posizioni simmetriche rispetto al punto di equilibrio; però solo l'equazione $F = -kx$, combinata con la seconda legge della dinamica e le equazioni del moto uniformemente accelerato, ha consentito di prevedere la posizione della massa oscillante in ogni istante.

■ Il rapporto fra modello e realtà

In *Le città invisibili* Calvino parla del rapporto fra realtà e modello come problema di verità, descrivendo la città di Eudossia.

«A Eudossia, che si estende in alto e in basso, con vicoli tortuosi, scale, angiporti, catapecchie, si conserva un tappeto in cui puoi contemplare la vera forma della città. [...] se ti fermi a osservarlo con attenzione, ti persuadi che a ogni luogo del tappeto corrisponde un luogo della città e che tutte le cose contenute nella città sono comprese nel disegno [...]

Sul rapporto misterioso di due oggetti così diversi come il tappeto e la città fu interrogato un oracolo. Uno dei due oggetti, – fu il responso, – ha la forma che gli dei diedero al cielo stellato e alle orbite su cui ruotano i mondi; l'altro ne è l'approssimativo riflesso, come ogni opera umana.

Gli àuguri già da tempo erano certi che l'armonico disegno del tappeto fosse di natura divina; in questo senso fu interpretato l'oracolo, senza dar luogo a controversie.

Ma nello stesso modo tu puoi trarne la conclusione opposta: che la vera mappa dell'universo sia la città d'Eudossia così com'è, una macchia che dilaga senza forma, con vie tutte a zig-zag, case che franano una sull'altra nel polverone, incendi, urla nel buio. >>>

(Italo Calvino, *Le città invisibili*, Mondadori, 1996)



● Dalla corrispondenza biunivoca...

Nel Seicento, grazie anche ai risultati ottenuti nel secolo precedente nel campo dell'algebra, si pongono le basi per un uso della matematica come strumento di conoscenza, descrizione e previsione dei fenomeni naturali.

Celebre è il passo del *Saggiatore* di Galileo Galilei del 1623: «La filosofia è scritta in questo grandissimo libro che continuamente ci sta aperto innanzi a gli occhi (io dico l'universo), ma non si può intendere se prima non s'impara a intender la lingua, e conoscer i caratteri, ne' quali è scritto. Egli è scritto in lingua matematica, e i caratteri son triangoli, cerchi, ed altre figure geometriche, senza i quali mezzi è impossibile a intenderne umanamente parola».

Non c'è alcun dubbio che queste parole individuino nella matematica la disciplina privilegiata per costruire una descrizione razionale del mondo, fondata, come precisava Galileo, sulle *sensate* esperienze e sulle *certe* dimostrazioni.

Nel Dialogo sopra i due massimi sistemi, Galileo afferma che, come nei commerci, per far tornare i calcoli, dalle merci si devono togliere le tare, così «quando il filosofo geometra vuol riconoscere in concreto gli effetti dimostrati in astratto, bisogna che difalchi gli impedimenti della materia».

Per esempio, l'oscillatore armonico è un buon modello non solo per il sistema massa-molla, ma anche per atomi eccitati da radiazioni elettromagnetiche.

Ma per Galileo la matematica non è soltanto la lingua della Natura: difalcati gli impedimenti, ossia semplificata la complessità del mondo fenomenico, i modelli matematici ne descrivono la vera essenza. Per esempio, eliminati gli attriti, otteniamo il principio d'inerzia che sta alla base del reale comportamento dei corpi in movimento.

C'è in Galileo, e successivamente in Newton, la convinzione che esista fra modello matematico e realtà una perfetta corrispondenza biunivoca.

...all'analogia

Una prospettiva meno rigida, che domina la ricerca scientifica fino agli inizi del Novecento, è quella dell'analogia meccanica: non si considera più il modello della meccanica newtoniana come costitutivo della realtà, ma solo come schema utile per una descrizione di fenomeni anche non appartenenti alla meccanica.

La modellistica contemporanea compie poi un ulteriore passo, sostituendo, all'analogia meccanica, l'analogia matematica. L'attenzione è spostata dal problema della verità a quello della descrizione e, soprattutto, della previsione dei comportamenti in situazioni complesse.

Dice Von Neumann parlando del concetto di modello: «La giustificazione di un siffatto costruito matematico è soltanto e precisamente che ci si aspetta che funzioni».



«Le nuvole non sono sfere, le montagne non sono coni, le coste non sono circonferenze, la corteccia non è liscia, né il fulmine viaggia in linea retta.»

Queste parole di Benoît B. Mandelbrot sottolineano la sfida della modellistica moderna: descrivere la Natura nella sua complessità, senza eliminarne aspetti significativi. Per farlo Mandelbrot utilizza nuove figure geometriche, i frattali.

Attività

I modelli matematici sono utilizzati nei più svariati campi disciplinari. Sviluppa questo tema con una presentazione multimediale.

Da leggere:

- Giorgio Israel, *Modelli matematici*, Muzio, 2009.
- Ludwig Boltzmann, *Modelli matematici, fisica e filosofia: scritti divulgativi*, Bollati Boringhieri, 1999.
- Primo Brandi, Anna Salvadori, *Modelli matematici elementari*, Bruno Mondadori, 2004.
- Benoît B. Mandelbrot, *Gli oggetti frattali*, Einaudi, 2000.



Cerca nel Web:

modelli matematici, fisica, biologia, economia, medicina, sport, musica

18

١٨

[numerazione araba]

१८

[numerazione devanagari]

十八

[numerazione cinese]

LE MATRICI E I DETERMINANTI



IL RANKING DI GOOGLE Ideato nel 1998 da Sergey Brin e Larry Page, Google è il motore di ricerca più utilizzato al mondo. Soddisfa milioni di richieste al giorno e cerca informazioni in un database di oltre otto miliardi di pagine web.

Quale criterio utilizza Google per ordinare le pagine?

1. LE MATRICI

Per rappresentare un qualunque insieme di numeri, ordinato come in una tabella, si utilizza un quadro composto da righe e da colonne, delimitato a destra e a sinistra da due parentesi quadre:

$$\begin{bmatrix} 2 & 6 & 0 & -1 & 6 \\ 3 & 1 & 5 & 7 & 0 \\ 5 & 2 & -3 & 5 & 2 \end{bmatrix}.$$

Un quadro di questo tipo viene detto **matrice**.

DEFINIZIONE

Matrice

Dati $m \times n$ numeri, la tabella che li ordina in m righe e n colonne viene detta matrice.

Gli $m \times n$ numeri presenti nella matrice si chiamano **elementi** della matrice.

Se il numero delle righe è diverso da quello delle colonne, la matrice si dice **rettangolare**, altrimenti si dice **quadrata**.

ESEMPIO

La matrice

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

è rettangolare, perché è formata da 2 righe e 4 colonne, mentre la matrice

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 \\ 8 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 1 \\ 5 & 3 & 9 & 7 \end{bmatrix}$$

è quadrata, perché è formata da 4 righe e 4 colonne. Si dice che tale matrice è di ordine 4.

Per indicare gli elementi generici di una matrice $m \times n$, utilizziamo una lettera dell'alfabeto, per esempio a , munita di due indici; il primo indica il numero di riga e il secondo il numero di colonna. Per esempio, l'elemento a_{32} si trova all'incrocio fra la 3^a riga e la 2^a colonna.

Una matrice generica di 3 righe e 4 colonne può essere rappresentata nel seguente modo:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{bmatrix}.$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & 4 & 0 \\ 2 & 8 & 7 & 5 \end{bmatrix}$$

$a_{32} = 8$

terza riga seconda colonna

Più in generale, una matrice $m \times n$ è indicata nel seguente modo:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & \dots & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & \dots & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & \dots & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & a_{m4} & \dots & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} m \text{ è il numero di righe,} \\ n \text{ è il numero di colonne.} \end{array}$$

Si è soliti indicare una matrice con lettere maiuscole: A, B, C, \dots . I suoi elementi si rappresentano, come abbiamo visto, con lettere minuscole contrassegnate da due indici.

La scrittura

$$A = [a_{ik}], \quad 1 \leq i \leq m \text{ e } 1 \leq k \leq n,$$

è una maniera abbreviata per descrivere una matrice $m \times n$.

Due matrici $m \times n$ vengono dette **dello stesso tipo** e gli elementi che occupano lo stesso posto si dicono **elementi corrispondenti**.

● Due matrici dello stesso tipo si dicono anche **simili**.

ESEMPIO

Le matrici

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 2 & 0 & 9 \end{bmatrix} \text{ e } \begin{bmatrix} 5 & -6 & 7 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

sono dello stesso tipo, perché entrambe sono formate da 2 righe e 3 colonne. Elementi corrispondenti sono 3 e 5, 4 e -6, 5 e 7, ...

Due matrici dello stesso tipo sono **uguali** se gli elementi corrispondenti sono uguali.

ESEMPIO

Le matrici $\begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ sono uguali.

Due matrici dello stesso tipo sono **opposte** quando gli elementi corrispondenti sono opposti.

ESEMPIO

Le matrici $\begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} -1 & 3 & -2 \\ -2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ sono opposte.

Matrici particolari

DEFINIZIONE

Matrice nulla

Una matrice è nulla se tutti i suoi elementi sono uguali a 0.

La matrice nulla si indica con il simbolo O oppure O_{mn} se si vuole precisare il numero delle righe e delle colonne.

ESEMPIO

$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ è una matrice nulla.

DEFINIZIONE**Matrice riga**

Una matrice formata da una sola riga si chiama matrice riga o vettore riga.

ESEMPIO

La matrice $[1 \quad 3 \quad -2 \quad 4]$ è una matrice riga.

DEFINIZIONE**Matrice colonna**

Una matrice formata da una sola colonna si chiama matrice colonna o vettore colonna.

ESEMPIO

La seguente è una matrice colonna:

$$\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \\ -5 \end{bmatrix}.$$

DEFINIZIONE**Matrice trasposta**

La matrice trasposta della matrice

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & \dots & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & \dots & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & \dots & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & a_{m4} & \dots & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad (m \text{ righe} \times n \text{ colonne})$$

è la matrice che si ottiene da questa scambiando ordinatamente le righe con le colonne:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} & \dots & a_{m2} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & \dots & a_{m3} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & \dots & a_{m4} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & a_{3n} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad (n \text{ righe} \times m \text{ colonne}).$$

● La trasposta della trasposta di una matrice A è la matrice stessa:

$$(A_T)_T = A.$$

La trasposta di una matrice A si indica con A_T .

ESEMPIOData la matrice 3×4

$$\begin{bmatrix} -1 & 3 & 4 & 1 \\ 6 & 2 & -3 & 5 \\ -2 & 8 & -6 & 7 \end{bmatrix},$$

la sua trasposta è la matrice 4×3 :

$$\begin{bmatrix} -1 & 6 & -2 \\ 3 & 2 & 8 \\ 4 & -3 & -6 \\ 1 & 5 & 7 \end{bmatrix}.$$

2. LE MATRICI QUADRATE

Abbiamo già visto che una matrice è quadrata quando il numero di righe è uguale al numero di colonne. Una generica matrice $n \times n$ viene indicata nel seguente modo:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad (n \text{ è il numero di righe e di colonne}).$$

DEFINIZIONE**Ordine di una matrice quadrata**

Si chiama ordine di una matrice quadrata il numero delle sue righe (o delle colonne).

La matrice precedente è di ordine n .

La **diagonale principale** è formata da tutti gli elementi che si trovano sulla diagonale di estremi a_{11} e a_{nn} . Di conseguenza, tali elementi hanno i due indici uguali fra loro (a_{11} , a_{22} , a_{33} , ...).

La **diagonale secondaria** è formata da tutti gli elementi che si trovano sulla diagonale di estremi a_{1n} e a_{n1} . Di conseguenza, tali elementi hanno i due indici che sommati danno sempre $n + 1$.

ESEMPIO

Nella seguente matrice di ordine 3:

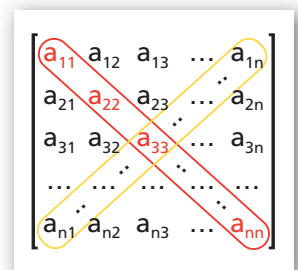
$$\begin{bmatrix} 5 & 6 & 8 \\ -2 & 0 & 1 \\ 2 & -4 & 3 \end{bmatrix}$$

gli elementi della diagonale principale sono 5, 0, 3;
gli elementi della diagonale secondaria sono 8, 0, 2.

In una matrice quadrata due elementi si dicono **coniugati** se i loro posti sono simmetrici rispetto alla diagonale principale, ossia tali elementi hanno gli stessi indici ma in ordine inverso: a_{ik} e a_{ki} .

ESEMPIONella seguente matrice sono coniugati 2 e -2 , 0 e 5, 1 e 4.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & 3 & 1 \\ 5 & 4 & 6 \end{bmatrix}$$



▲ **Figura 1** In rosso è evidenziata la diagonale principale e in giallo la diagonale secondaria di una matrice quadrata.

● Per esempio, la seguente è una matrice diagonale di ordine 4:

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

● Per esempio, la seguente matrice di ordine 3 è triangolare inferiore:

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 6 & 5 & 3 \end{bmatrix}.$$

● Non è possibile sommare due matrici che non siano dello stesso tipo. Per esempio **non** si può eseguire la seguente addizione:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}.$$

● In simboli, se $A = [a_{ij}]$ e $B = [b_{ij}]$ sono due matrici dello stesso tipo, la loro somma è la matrice espressa come:

$$A + B = [a_{ij} + b_{ij}].$$

DEFINIZIONE**Matrice diagonale**

Una matrice quadrata si dice diagonale quando tutti i suoi elementi sono nulli tranne quelli della diagonale principale.

DEFINIZIONE**Matrice identica**

Una matrice diagonale si dice identica (o matrice unità) quando gli elementi della diagonale principale sono tutti uguali a 1.

La matrice identica di ordine n si indica con il simbolo I_n .

ESEMPIO

La seguente matrice di ordine 3 è identica:

$$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

DEFINIZIONE**Matrice triangolare**

Una matrice quadrata si dice:

- triangolare superiore quando tutti i suoi elementi al di sotto della diagonale principale sono nulli;
- triangolare inferiore quando sono nulli tutti i suoi elementi al di sopra della diagonale principale.

3. LE OPERAZIONI CON LE MATRICI

DEFINIZIONE**Addizione di due matrici dello stesso tipo**

La somma di due matrici dello stesso tipo è una terza matrice i cui elementi sono la somma degli elementi corrispondenti delle due matrici.

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a' & b' & c' \\ d' & e' & f' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a + a' & b + b' & c + c' \\ d + d' & e + e' & f + f' \end{bmatrix}$$

ESEMPIO

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 3 \\ 6 & -5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 4 & 2 \\ -5 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - 1 & 4 + 3 \\ -2 + 4 & 3 + 2 \\ 6 - 5 & -5 + 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 7 \\ 2 & 5 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}$$

Poiché il risultato di un'addizione fra matrici dello stesso tipo è ancora una matrice dello stesso tipo, l'addizione è un'**operazione interna** nell'insieme delle matrici dello stesso tipo.

L'addizione fra matrici dello stesso tipo gode delle **proprietà commutativa** e **associativa** e ammette come **elemento neutro** la matrice nulla dello stesso tipo.

DEFINIZIONE

Sottrazione di due matrici dello stesso tipo

La differenza fra due matrici dello stesso tipo è la matrice che si ottiene sommando alla prima matrice la matrice opposta della seconda.

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a' & b' & c' \\ d' & e' & f' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a - a' & b - b' & c - c' \\ d - d' & e - e' & f - f' \end{bmatrix}$$

ESEMPIO

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 3 \\ 6 & -5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 4 & 2 \\ -5 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 3 \\ 6 & -5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -4 & -2 \\ 5 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -6 & 1 \\ 11 & -6 \end{bmatrix}$$

DEFINIZIONE

Moltiplicazione di una matrice per un numero reale

Il prodotto di una matrice per un numero reale k è una matrice dello stesso tipo i cui elementi sono tutti moltiplicati per k .

$$k \cdot \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k \cdot a & k \cdot b & k \cdot c \\ k \cdot d & k \cdot e & k \cdot f \end{bmatrix}$$

ESEMPIO

$$3 \cdot \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -5 & 4 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & -3 & 0 \\ -15 & 12 & -9 \end{bmatrix}$$

DEFINIZIONE

Moltiplicazione di una matrice riga $1 \times n$ per una matrice colonna $n \times 1$

Il prodotto di una matrice riga per una matrice colonna, con lo stesso numero di elementi, è una matrice formata da un solo elemento, ottenuto sommando fra loro i prodotti degli elementi corrispondenti.

$$\begin{bmatrix} a & b & c \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} d \\ e \\ f \end{bmatrix} = [a \cdot d + b \cdot e + c \cdot f]$$

Se $A = [a_{1j}]$, con $1 \leq j \leq n$, è una matrice riga e $B = [b_{i1}]$, con $1 \leq i \leq n$, è una matrice colonna, il loro prodotto si esprime come:

$$A \cdot B = [a_{11} \ a_{12} \ \dots \ a_{1n}] \cdot \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \dots \\ b_{n1} \end{bmatrix} = [a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + \dots + a_{1n}b_{n1}].$$

● L'elemento neutro per l'addizione fra matrici è una matrice E tale che

$$A + E = E + A = A$$

per ogni matrice A .

● In simboli, se $A = [a_{ij}]$ e $B = [b_{ij}]$ sono due matrici dello stesso tipo, la loro differenza è la matrice:

$$A - B = [a_{ij} - b_{ij}].$$

● In simboli, se k è un numero reale e $A = [a_{ij}]$ una matrice qualsiasi, la matrice prodotto di k per A è espressa come:

$$k \cdot A = [k \cdot a_{ij}].$$

● Se la matrice riga e la matrice colonna hanno un numero diverso di elementi, **non** è possibile calcolare il prodotto.

● Gli elementi corrispondenti sono quelli che occupano lo stesso posto d'ordine nella riga e nella colonna.

● Il punto di moltiplicazione fra le matrici può essere sottinteso. Pertanto scriveremo indifferentemente:

$$A \cdot B \text{ o } AB.$$

ESEMPIO

Calcoliamo il prodotto di una matrice riga di 3 elementi per una matrice colonna, sempre di 3 elementi:

$$[2 \ 0 \ 1] \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ -2 \end{bmatrix} = [2 \cdot 3 + 0 \cdot 4 + 1 \cdot (-2)] = [4].$$

Il risultato è la matrice [4], di ordine 1.

● Se la prima matrice ha un numero di colonne diverso dal numero di righe della seconda matrice, allora **non** è possibile calcolare il prodotto.

● Due matrici tali che il numero delle colonne della prima sia uguale al numero delle righe della seconda si dicono **conformabili**.

DEFINIZIONE

Moltiplicazione di una matrice $m \times n$ per una matrice $n \times p$

Il prodotto di una matrice A di tipo $m \times n$ per una matrice B di tipo $n \times p$ è una matrice C di tipo $m \times p$, il cui elemento c_{hk} è dato dal prodotto della riga numero h della prima matrice per la colonna numero k della seconda matrice.

$$\begin{matrix} & \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{bmatrix} & \cdot & \begin{bmatrix} m & n & o \\ p & q & r \end{bmatrix} & = & \begin{bmatrix} \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & e \cdot n + f \cdot q & \dots \end{bmatrix}
 \end{matrix}$$

$\begin{matrix} \uparrow & & \uparrow \\ 2 & & 2 \end{matrix}$

Se $A = [a_{ij}]$ è una matrice $m \times n$ e $B = [b_{ik}]$ è una matrice $n \times p$, il loro prodotto è la matrice $C = [c_{hk}]$ di tipo $m \times p$ espressa nel modo seguente:

$$\begin{matrix} \text{riga } h & \begin{bmatrix} \dots \\ a_{h1} & a_{h2} & \dots & a_{hn} \\ \dots \end{bmatrix} & \cdot & \begin{bmatrix} b_{1k} \\ b_{2k} \\ \vdots \\ b_{nk} \end{bmatrix} & = & \begin{bmatrix} \vdots \\ \dots & c_{hk} & \dots \\ \vdots \end{bmatrix} & \text{riga } h \\ & & & \text{colonna } k & & \text{colonna } k & &
 \end{matrix}$$

$$A \cdot B = C = [c_{hk}],$$

$$c_{hk} = a_{h1}b_{1k} + a_{h2}b_{2k} + \dots + a_{hn}b_{nk}.$$

ESEMPIO

Calcoliamo il prodotto fra una matrice 2×3 e una matrice 3×4 . Scriviamo la matrice prodotto 2×4 con gli elementi generici:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 5 & -1 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \end{bmatrix}.$$

Determiniamo gli elementi della prima riga della matrice prodotto, moltiplicando la prima riga della prima matrice per tutte le colonne della seconda matrice.

Calcoliamo a_{11} :

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix} = [2 \cdot 1 + 0 \cdot 5 + 1 \cdot 0] = [2].$$

Quindi $a_{11} = 2$.

Analogamente, otteniamo:

$$a_{12} = 1, a_{13} = 4 \text{ e } a_{14} = 3.$$

Gli elementi della prima riga della matrice prodotto sono:

$$2, 1, 4, 3.$$

Determiniamo gli elementi della seconda riga della matrice prodotto, moltiplicando la seconda riga della prima matrice per tutte le colonne della seconda matrice.

Calcoliamo a_{21} :

$$\begin{bmatrix} -1 & -2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix} = [-11].$$

Quindi $a_{21} = -11$.

Analogamente, si ottengono:

$$a_{22} = 5, a_{23} = -17 \text{ e } a_{24} = 5.$$

Gli elementi della seconda riga della matrice prodotto sono:

$$-11, 5, -17, 5.$$

Possiamo scrivere:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 5 & -1 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 & 3 \\ -11 & 5 & -17 & 5 \end{bmatrix}.$$

● Se A e B sono due matrici qualsiasi, è possibile eseguire i prodotti $A \cdot B$ e $B \cdot A$ se e solo se A è di tipo $m \times n$ e B di tipo $n \times m$. La condizione è verificata se, in particolare, A e B sono matrici quadrate dello stesso ordine.

● Applicando la definizione di prodotto di matrici, possiamo anche calcolare la **potenza n -esima** di una matrice quadrata che definiamo:

$$A^n = \underbrace{A \cdot A \cdot \dots \cdot A}_{n \text{ volte}}, \text{ con } n \geq 2.$$

Le proprietà della moltiplicazione

In generale, la moltiplicazione fra matrici quadrate **non** è commutativa.

ESEMPIO

Consideriamo le seguenti matrici quadrate 2×2 :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Calcoliamo i prodotti:

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}, \quad B \cdot A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Quindi: $A \cdot B \neq B \cdot A$.

● Se $A \cdot B = B \cdot A$, allora A e B si dicono **commutabili**. Per esempio, puoi verificare che le matrici $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ sono commutabili. In generale, sono commutabili le matrici diagonali dello stesso ordine.

● Supponiamo che per le matrici A , B e C sia possibile calcolare le somme e i prodotti indicati.

Enunciamo le proprietà di cui gode la moltiplicazione fra matrici:

- **proprietà associativa:**

$$(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C);$$

- **proprietà distributiva** (a sinistra e a destra) della moltiplicazione rispetto all'addizione:

$$A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C; \quad (A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C.$$

Inoltre, se A e B sono matrici quadrate di ordine n :

- la moltiplicazione per la matrice nulla ha per prodotto la matrice nulla:

$$A \cdot O = O \cdot A = O;$$

- la moltiplicazione per la matrice identica ha per prodotto la matrice stessa:

$$A \cdot I_n = I_n \cdot A = A,$$

quindi la matrice identica di ordine n è l'elemento neutro della moltiplicazione fra matrici quadrate di ordine n ;

- la trasposta del prodotto di due matrici quadrate è uguale al prodotto della trasposta della seconda matrice per la trasposta della prima:

$$(A \cdot B)_T = B_T \cdot A_T.$$

Vale anche la proprietà distributiva della moltiplicazione di un numero rispetto all'addizione di matrici:

$$\alpha \cdot (A + B) = \alpha \cdot A + \alpha \cdot B, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Non vale la legge di annullamento del prodotto. Infatti, la matrice prodotto $A \cdot B$ può essere la matrice nulla O senza che siano nulle le matrici A e B .

In tal caso le matrici A e B si dicono *divisori dello zero*.

ESEMPIO

Le matrici $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ sono divisori dello zero.

$$\text{Infatti } A \cdot B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Non vale la legge di cancellazione, ossia si può verificare che

$$A \cdot B = A \cdot C,$$

ma $B \neq C$.

ESEMPIO

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 6 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

$$A \cdot B = A \cdot C = \begin{bmatrix} 4 \\ -8 \end{bmatrix}, \quad \text{ma } B \neq C.$$

● Data un'operazione $*$ di moltiplicazione nell'insieme A , vale la *legge di annullamento del prodotto* se, $\forall a, b \in A$, da $a * b = 0$ segue che $a = 0 \vee b = 0$.

4. I DETERMINANTI

A ogni matrice quadrata viene associato un numero reale, detto **determinante** della matrice. Per indicare il determinante di una matrice si può scrivere «det» davanti alla matrice, oppure scrivere gli stessi elementi della matrice, delimitati da due righe verticali.

$$\text{Se } A = [a_{ij}] \rightarrow \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

ESEMPIO

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 5 \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 5 \end{vmatrix}.$$

Prima di definire il determinante di una generica matrice $n \times n$, prendiamo in esame i determinanti delle matrici del primo, secondo e terzo ordine.

DEFINIZIONE

Determinante di una matrice 1×1

Il determinante di una matrice del primo ordine è uguale al numero stesso che compare nella matrice.

$$|a| = a$$

ESEMPIO

$$\det[-14] = |-14| = -14.$$

DEFINIZIONE

Determinante di una matrice 2×2

Il determinante di una matrice del secondo ordine è uguale alla differenza fra il prodotto dei due elementi della diagonale principale e il prodotto dei due elementi della diagonale secondaria.

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = a \cdot d - b \cdot c$$

ESEMPIO

$$\det \begin{bmatrix} -5 & 3 \\ -1 & 7 \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} -5 & 3 \\ -1 & 7 \end{vmatrix} = -5 \cdot 7 - 3 \cdot (-1) = -32.$$

● Il determinante si definisce soltanto per le matrici quadrate.

● Attenzione: non devi confondere il simbolo di determinante con quello di valore assoluto!

● Hai già usato nel biennio i determinanti del secondo ordine per risolvere i sistemi lineari di due equazioni in due incognite mediante il metodo di Cramer.

Il determinante di una matrice di ordine 3

Per calcolare il determinante di una matrice di ordine 3 illustriamo un procedimento che riconduce il calcolo ai determinanti di ordine 2. Diamo prima alcune definizioni.

I complementi algebrici

Consideriamo una matrice A di ordine 3 e analizziamo gli elementi della sua prima riga. I termini a_{11} e a_{13} sono detti di **classe pari** perché la somma dei loro indici è un numero pari, mentre a_{12} è detto di **classe dispari** perché la somma dei suoi indici è un numero dispari.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

DEFINIZIONE

Classe pari o dispari di un elemento a_{ij}

Data una matrice A di ordine 3, un elemento a_{ij} , con $1 \leq i \leq 3$ e $1 \leq j \leq 3$, si dice di classe pari (dispari) se $i + j$ è un numero pari (dispari).

Definiamo ora il complemento algebrico.

Nella matrice A scegliamo un elemento di classe pari, per esempio a_{11} , e sopprimiamo la riga e la colonna cui appartiene l'elemento scelto.

Otteniamo in questo modo una nuova matrice di ordine 2, di cui calcoliamo il determinante, che facciamo precedere dal segno +:

$$A_{11} = + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

A_{11} è detto **complemento algebrico** di a_{11} .

Ripetiamo ora il procedimento per un elemento di classe dispari, per esempio a_{12} . In corrispondenza dell'elemento, sopprimiamo la prima riga e la seconda colonna della matrice A .

Della nuova matrice di ordine 2 calcoliamo il determinante e ne consideriamo l'opposto (che indichiamo con la lettera maiuscola A_{12}):

$$A_{12} = - \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

A_{12} è detto **complemento algebrico** di a_{12} .

Osserva che il segno + o il segno - viene attribuito a seconda che l'elemento a_{ij} sia di classe pari o dispari.

Definiamo allora per un elemento qualsiasi a_{ij} il complemento algebrico nel modo seguente.

DEFINIZIONE

Complemento algebrico di un elemento a_{ij}

Il complemento algebrico di un elemento a_{ij} di una matrice A di ordine 3 è il determinante della matrice di ordine 2 ottenuta da A sopprimendo la riga e la colonna cui l'elemento appartiene, preceduto dal segno + o dal segno - a seconda che a_{ij} sia di classe pari o dispari.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Si può dimostrare che la somma dei prodotti degli elementi di una riga (o colonna) per i rispettivi complementi algebrici **non** dipende dalla riga (o colonna) considerata.

TEOREMA

Determinante di una matrice

3×3

Il determinante di una matrice del terzo ordine è uguale alla somma dei prodotti degli elementi di una qualunque riga (o colonna) per i rispettivi complementi algebrici.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot A_{11} + a_{12} \cdot A_{12} + a_{13} \cdot A_{13}$$

ESEMPIO

Calcoliamo il seguente determinante del terzo ordine:

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 3(12 - 15) - 1(3 - 10) + 2(3 - 8) = -9 + 7 - 10 = -12.$$

● Per calcolare il determinante consideriamo gli elementi della prima riga. Otterremo lo stesso risultato partendo da qualunque riga o colonna.

La regola di Sarrus

È possibile calcolare il determinante di una matrice del terzo ordine in un altro modo, facendo uso della regola di Sarrus.

● La regola di Sarrus è valida **solo** per calcolare i determinanti del **terzo** ordine.

ESEMPIO

Calcoliamo il determinante dell'esempio precedente servendoci della regola di Sarrus, come illustrato nella figura 2.

▼ Figura 2

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 5 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 3 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

a. Ricopiamo a destra del determinante i termini delle prime due colonne della matrice.

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 5 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 3 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

b. Moltiplichiamo i termini lungo la diagonale principale e lungo le due diagonali parallele a essa; scriviamo i prodotti e li sommiamo.

$$36 + 10 + 6 = 52$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 5 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 3 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

c. Ripetiamo il procedimento moltiplicando i termini lungo la diagonale secondaria e lungo le due diagonali parallele a essa; scriviamo i prodotti e li sommiamo.

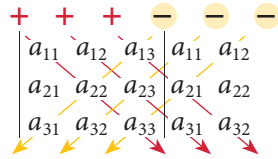
$$16 + 45 + 3 = 64$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$= 52 - 64 = -12$$

d. Il determinante è uguale alla differenza fra la prima e la seconda somma di prodotti.

In generale, per una matrice di ordine 3 qualsiasi $A = [a_{ij}]$, con $1 \leq i, j \leq 3$, possiamo ricavare la regola di Sarrus dal seguente schema:



e quindi ottenere:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$

Il determinante di una matrice di ordine n

Se si esclude la regola di Sarrus, le definizioni e le regole date per calcolare un determinante del terzo ordine possono essere estese anche a determinanti di ordine superiore al terzo.

DEFINIZIONE

Determinante di una matrice $n \times n$

Il determinante di una matrice di ordine n è uguale alla somma dei prodotti degli elementi di una qualunque riga (o colonna) per i rispettivi complementi algebrici.

Il calcolo del determinante di una matrice di ordine n , sviluppato rispetto agli elementi della prima riga, è il seguente:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot A_{11} + a_{12} \cdot A_{12} + \dots + a_{1j} \cdot A_{1j} + \dots + a_{1n} \cdot A_{1n}.$$

● Ricordiamo che i complementi algebrici degli elementi della prima riga sono i seguenti.

$$A_{11} = + \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad A_{12} = - \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad A_{1j} = (-1)^{1+j} \begin{vmatrix} a_{21} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

ESEMPIO

Calcoliamo il determinante della seguente matrice 4×4 :

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Osserviamo che conviene sviluppare il calcolo rispetto alla riga o alla colonna che contiene il maggior numero di elementi nulli.

● Il complemento algebrico di un elemento a_{ij} di una matrice A di ordine n è il determinante della matrice di ordine $n - 1$ ottenuta da A sopprimendo la riga e la colonna cui l'elemento appartiene, preceduto dal segno $+$ o dal segno $-$, a seconda che a_{ij} sia di classe pari o dispari.

Sviluppiamo il calcolo rispetto alla prima riga, che presenta due elementi uguali a 0:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = a_{11} \cdot A_{11} + a_{14} \cdot A_{14} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 3 & 4 \\ -2 & 1 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix}.$$

Calcoliamo i due determinanti del terzo ordine con la regola di Sarrus.

Primo determinante: $3 + 16 - 1 - (-6 + 4 + 2) = 18$.

Secondo determinante: $-2 + 3 + 0 - (2 - 12 + 0) = 11$.

Quindi:

$$\det A = 18 - 11 = 7.$$

5. LE PROPRIETÀ DEI DETERMINANTI

Per i determinanti valgono le proprietà che ora enunciamo.

PROPRIETÀ 1

Determinante di una matrice con un'intera riga (o colonna) nulla

Se in una matrice quadrata compare un'intera riga (o colonna) di elementi tutti uguali a 0, allora il determinante della matrice è uguale a 0.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & 0 & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & 0 & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0$$

ESEMPIO

$$\begin{vmatrix} 5 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

Infatti, se si sceglie la riga degli zeri e si sviluppa il calcolo del determinante risulta: $0 \cdot A_{21} + 0 \cdot A_{22} + 0 \cdot A_{23} = 0$.

PROPRIETÀ 2

Determinante di una matrice con righe (o colonne) in proporzione

Se in una matrice quadrata due righe (o due colonne) sono uguali o in proporzione, allora il determinante della matrice è uguale a 0.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ k \cdot a_{11} & k \cdot a_{12} & \dots & k \cdot a_{1n} \\ a_{31} & a_{32} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0$$

ESEMPIO

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 5 & 6 \\ 4 & 6 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

Infatti, la prima e la terza riga hanno gli elementi corrispondenti in proporzione: 2 e 4, 3 e 6, 1 e 2.

Verifichiamo la proprietà eseguendo il calcolo del determinante, sviluppato rispetto agli elementi della prima riga:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 5 & 6 \\ 4 & 6 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 6 & 2 \end{vmatrix} - 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = \\ = 2(-26) - 3(-22) + (-14) = -52 + 66 - 14 = 0.$$

PROPRIETÀ 3

Determinante di una matrice con una riga (o colonna) moltiplicata per un numero reale

Se in una matrice quadrata si moltiplicano tutti gli elementi di una riga (o colonna) per un numero reale k , allora anche il determinante della matrice risulta moltiplicato per k .

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = D \Rightarrow \begin{vmatrix} k \cdot a_{11} & k \cdot a_{12} & \dots & k \cdot a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = k \cdot D$$

● Se A è una matrice $n \times n$, allora

$$\det(kA) = k^n \cdot \det A.$$

ESEMPIO

Dato il determinante $D = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ -4 & 3 \end{vmatrix}$, esso vale $2 \cdot 3 - (-4) \cdot 5 = 26$.

Moltiplichiamo gli elementi della prima riga per 4 e otteniamo:

$$\begin{vmatrix} 8 & 20 \\ -4 & 3 \end{vmatrix} = 24 - (-80) = 104 = 4D, \text{ perché } 104 = 4 \cdot 26.$$

PROPRIETÀ 4

Determinante di una matrice in cui a una riga (o colonna) si somma un'altra riga (o colonna) moltiplicata per un numero reale

Se in una matrice quadrata a ogni elemento di una riga si somma il corrispondente elemento di un'altra riga, moltiplicato per un numero reale k , allora il determinante della matrice non cambia. Lo stesso accade per due colonne.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = D \Rightarrow \begin{vmatrix} a_{11} + ka_{21} & a_{12} + ka_{22} & \dots & a_{1n} + ka_{2n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = D$$

ESEMPIO

Dato il determinante $D = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} = 1 \cdot 5 - (-2) \cdot 3 = 11$, aggiungiamo a ogni elemento della seconda riga il corrispondente della prima riga moltiplicato per 2 e otteniamo:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2+2 & 5+6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 11 \end{vmatrix} = 11 = D.$$

Osserviamo come la proprietà 4 consenta di semplificare i calcoli dei determinanti delle matrici di ordine superiore a 3.

ESEMPIO

Calcoliamo il determinante della matrice:

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 3 & -2 & 4 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 7 & 5 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & 4 & -2 \end{bmatrix}.$$

Osserviamo come la seconda riga contenga un elemento nullo.

Tramite la proprietà 4 modifichiamo gli elementi della seconda e della terza colonna per ottenere nella seconda riga altri elementi nulli: aggiungiamo a ogni elemento della seconda colonna il corrispondente della prima colonna moltiplicato per 2 e a ogni elemento della terza colonna il corrispondente della prima colonna moltiplicato per -1 e otteniamo:

$$\det A = D = \begin{vmatrix} 5 & 3+10 & -2-5 & 4 \\ 1 & -2+2 & 1-1 & 0 \\ 7 & 5+14 & -1-7 & 2 \\ -1 & 3-2 & 4+1 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 13 & -7 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & 19 & -8 & 2 \\ -1 & 1 & 5 & -2 \end{vmatrix}.$$

E ora sviluppiamo il calcolo del determinante rispetto alla seconda riga:

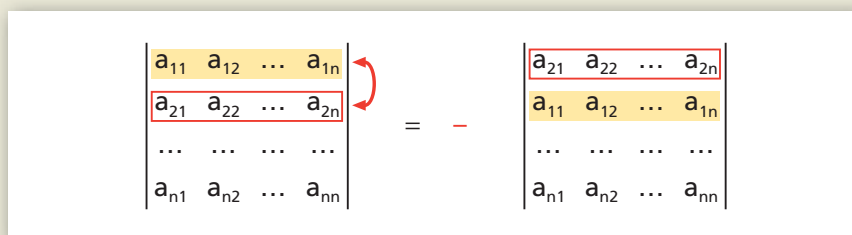
$$\begin{aligned} D &= (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} 13 & -7 & 4 \\ 7 & 19 & -8 \\ -1 & 1 & 5 \end{vmatrix} = \\ &= - [13(-8)(-2) + (-7) \cdot 2 \cdot 1 + 4 \cdot 19 \cdot 5 + \\ &= -1 \cdot (-8) \cdot 4 - 5 \cdot 2 \cdot 13 - (-2) \cdot 19 \cdot (-7)] = -210. \end{aligned}$$

● Applicando ripetutamente la proprietà 4, si possono rendere nulli tutti gli elementi di una linea (riga o colonna) tranne uno. Il calcolo del determinante sviluppato rispetto agli elementi di tale linea risulta così molto semplificato.

PROPRIETÀ 5

Determinante di una matrice con due righe (o colonne) scambiate fra loro

Se in una matrice quadrata si scambiano fra loro due righe (o due colonne), allora il determinante della matrice cambia segno.



ESEMPIO

Il determinante $D = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} = 11$ e il determinante $D' = \begin{vmatrix} -2 & 5 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -11$ sono opposti.

PROPRIETÀ 6**Determinante della trasposta di una matrice**

Se due matrici quadrate sono fra loro trasposte, allora hanno uguale il determinante.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

ESEMPIO

Le matrici trasposte $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$ hanno il determinante uguale. Infatti:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = 12 - 15 = -3 \quad \text{e} \quad \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = 12 - 15 = -3.$$

● Questa proprietà viene anche chiamata **teorema di Laplace**.

PROPRIETÀ 7**Proprietà dei complementi algebrici di una riga**

Scelta una riga di una matrice quadrata, se si sommano i prodotti degli elementi di questa riga per i complementi algebrici degli elementi corrispondenti di un'altra riga, il risultato è uguale a 0.

ESEMPIO

È data la matrice:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -4 & 6 & -5 \\ 2 & 5 & 4 \end{bmatrix}.$$

Consideriamo la prima riga $[1 \ -2 \ 3]$ e i complementi algebrici dell'ultima riga. Moltiplichiamo ogni elemento della prima riga per i suddetti complementi algebrici e poi sommiamo:

$$\begin{aligned} & 1 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 6 & -5 \end{vmatrix} - (-2) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -4 & -5 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -4 & 6 \end{vmatrix} = \\ & = 1 \cdot (10 - 18) + 2 \cdot (-5 + 12) + 3 \cdot (6 - 8) = -8 + 14 - 6 = 0. \end{aligned}$$

● Questa proprietà viene anche chiamata **teorema di Binet**.

PROPRIETÀ 8**Determinante del prodotto di due matrici**

Date due matrici quadrate A e B dello stesso ordine, la loro matrice prodotto ha per determinante il prodotto dei loro determinanti:

$$\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B.$$

ESEMPIO

Calcoliamo il prodotto delle seguenti matrici di ordine 2:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -9 & 7 \end{bmatrix}.$$

Calcoliamo i determinanti delle prime due matrici e della matrice prodotto:

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 6, \quad \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} = 3; \quad \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -9 & 7 \end{vmatrix} = 18.$$

È vero che $18 = 6 \cdot 3$.

Dalla definizione di determinante si possono dedurre alcune proprietà che agevolano i calcoli in alcuni casi.

1. Il determinante di una matrice diagonale è dato dal prodotto degli elementi della diagonale principale.
2. Il determinante di una matrice triangolare è dato dal prodotto degli elementi della diagonale principale.
3. Il determinante della matrice identica I_n è 1.

6. IL RANGO

Consideriamo la matrice:

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & -3 & 1 \\ 8 & 3 & -6 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Da questa matrice a 3 righe e 4 colonne è possibile estrarre delle sottomatrici quadrate, come la seguente:

$$\begin{bmatrix} 4 & -3 & 1 \\ 8 & -6 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Questa sottomatrice è del terzo ordine. Il suo determinante si chiama **minore di ordine 3**.

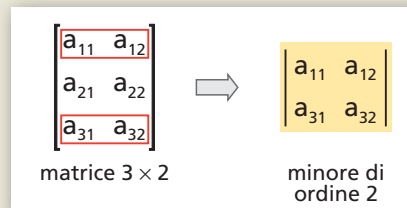
Possiamo anche estrarre una sottomatrice del secondo ordine, come la seguente:

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 8 & 3 \end{bmatrix}.$$

Il suo determinante si chiama **minore di ordine 2**.

DEFINIZIONE**Minore di ordine q**

Data una matrice A di m righe e n colonne, si chiama minore di ordine q della matrice A il determinante di una sottomatrice quadrata estratta da A e formata da q righe e q colonne.



● q è minore o uguale al più piccolo fra m e n .

● Un elemento qualsiasi di una matrice può essere considerato un minore di ordine 1.

DEFINIZIONE**Rango di una matrice**

Si chiama rango di una matrice non nulla il massimo ordine dei minori non nulli estraibili da essa.

● Il rango di una matrice è anche detto **caratteristica della matrice**.

Il rango r di una matrice soddisfa quindi due condizioni:

1. r è l'ordine di almeno un minore non nullo estraibile dalla matrice;
2. tutti i minori non nulli estraibili hanno ordine minore o uguale a r .

ESEMPIO

Verifichiamo che la seguente matrice 4×3 ha rango $r = 2$.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 6 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 6 & 12 & 6 \end{bmatrix}$$

Da questa matrice possiamo estrarre minori di ordine 3, 2 e 1.

1. Tutti i minori di ordine 3 sono nulli, perché la matrice ha tre righe proporzionali: la prima, la terza e la quarta.
2. Cerchiamo un minore di ordine 2, che risulti diverso da 0:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = 6 - 8 = -2.$$

Pertanto l'ordine massimo dei minori non nulli estraibili è $r = 2$.

Possiamo quindi affermare che il rango della matrice è uguale a 2.

● Ricorda che una matrice quadrata con due righe uguali o proporzionali ha determinante uguale a 0.

● Le definizioni sono analoghe a quella di reciproco di un numero a . Infatti si ha:

$$a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1.$$

a^{-1} esiste se e solo se $a \neq 0$.

7. LA MATRICE INVERSA

DEFINIZIONE

Matrice inversa di una matrice quadrata

Si chiama matrice inversa di una matrice quadrata A di ordine n la matrice quadrata A^{-1} tale che risulti:

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_n.$$

Non tutte le matrici quadrate ammettono la matrice inversa. Se una matrice ha la matrice inversa, si dice **invertibile**. Si dimostra che **condizione necessaria e sufficiente affinché una matrice sia invertibile è che il suo determinante sia diverso da 0**.

Vediamo con un esempio il procedimento per calcolarla.

Consideriamo la matrice A e calcoliamo il suo determinante con la regola di Sarrus:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}; \quad D = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 4 + 2 + 0 - (0 + 1 + 12) = -7.$$

Calcoliamo i complementi algebrici di tutti gli elementi di A .

$$A_{11} = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -3; \quad A_{12} = -\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -5; \quad A_{13} = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1;$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -4; \quad A_{22} = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -2; \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 1;$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 2; \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 1; \quad A_{33} = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = -4.$$

Dividiamo ora ciascun complemento algebrico per il determinante D della matrice A . I numeri così ottenuti sono detti **reciproci** degli elementi di A . Per esempio, $\frac{A_{11}}{D}$ è il reciproco di a_{11} .

Scriviamo poi la matrice quadrata del terzo ordine, ottenuta considerando la trasposta della matrice formata dai reciproci di tutti gli elementi di A :

$$A' = \begin{bmatrix} \frac{3}{7} & \frac{4}{7} & -\frac{2}{7} \\ \frac{5}{7} & \frac{2}{7} & -\frac{1}{7} \\ \frac{1}{7} & -\frac{1}{7} & \frac{4}{7} \end{bmatrix}.$$

Verifichiamo che la matrice ottenuta risolve il problema iniziale, ossia che i prodotti $A \cdot A'$ e $A' \cdot A$ sono uguali alla matrice identica di ordine 3:

$$A \cdot A' = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{3}{7} & \frac{4}{7} & -\frac{2}{7} \\ \frac{5}{7} & \frac{2}{7} & -\frac{1}{7} \\ \frac{1}{7} & -\frac{1}{7} & \frac{4}{7} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I_3;$$

$$A' \cdot A = \begin{bmatrix} \frac{3}{7} & \frac{4}{7} & -\frac{2}{7} \\ \frac{5}{7} & \frac{2}{7} & -\frac{1}{7} \\ \frac{1}{7} & -\frac{1}{7} & \frac{4}{7} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I_3.$$

La matrice A' risulta l'inversa di A : si indica con A^{-1} .

Per calcolare l'inversa di una matrice invertibile, generalizziamo il procedimento dell'esempio precedente.

Data la matrice A di ordine n :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

con determinante $D \neq 0$, per ottenere la matrice inversa A^{-1} occorre:

- scrivere la matrice dei complementi algebrici A_{ij} degli elementi di A ;
- dividere ogni elemento di questa matrice per D ;
- scrivere la trasposta della matrice ottenuta.

Si ha quindi:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{A_{11}}{D} & \frac{A_{21}}{D} & \frac{A_{31}}{D} & \dots & \frac{A_{n1}}{D} \\ \frac{A_{12}}{D} & \frac{A_{22}}{D} & \frac{A_{32}}{D} & \dots & \frac{A_{n2}}{D} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{A_{1n}}{D} & \frac{A_{2n}}{D} & \frac{A_{3n}}{D} & \dots & \frac{A_{nn}}{D} \end{bmatrix}.$$

- Il reciproco di a_{11} è:
 $\frac{-3}{-7} = \frac{3}{7}$.