

ESAME DI STATO 2015
TEMA DI MATEMATICA

Il candidato risolve uno dei due problemi e risponde a 5 quesiti del questionario.

Problema 1

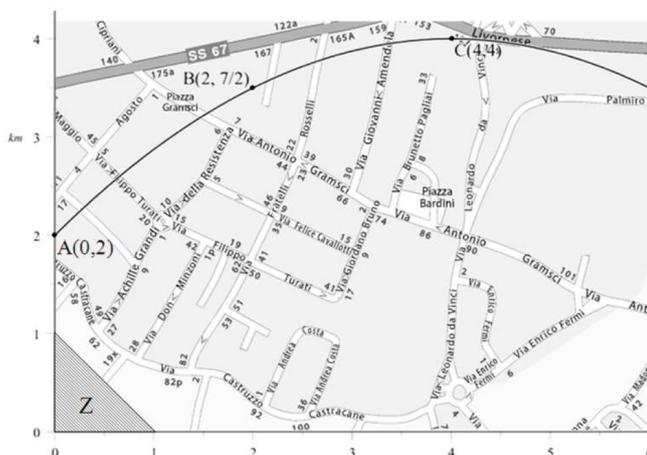
Il piano tariffario proposto da un operatore telefonico prevede, per le telefonate dall'estero, un canone fisso da 10 euro al mese, più 10 centesimi per ogni minuto di conversazione. Indicando con x i minuti di conversazione effettuati in un mese, con $f(x)$ la spesa totale nel mese e con $g(x)$ il costo medio al minuto:

1. Individua l'espressione analitica delle funzioni $f(x)$ e $g(x)$ e rappresentale graficamente; verifica che la funzione $g(x)$ non ha massimi né minimi relativi e dai la tua interpretazione dell'andamento delle due funzioni alla luce della situazione concreta che esse rappresentano.
2. Detto x_0 il numero di minuti di conversazione già effettuati nel mese corrente, determina x_1 tale che:

$$g(x_1) = \frac{g(x_0)}{2}$$

Traccia il grafico della funzione che esprime x_1 in funzione di x_0 e discuti il suo andamento. Che significato ha il suo asintoto verticale?

Sul suo sito web l'operatore telefonico ha pubblicato una mappa che rappresenta la copertura del segnale telefonico nella zona di tuo interesse:



La zona è delimitata dalla curva passante per i punti A , B e C , dagli assi x e y , e dalla retta di equazione $x = 6$; la porzione etichettata con la “Z”, rappresenta un’area non coperta dal segnale telefonico dell’operatore in questione.

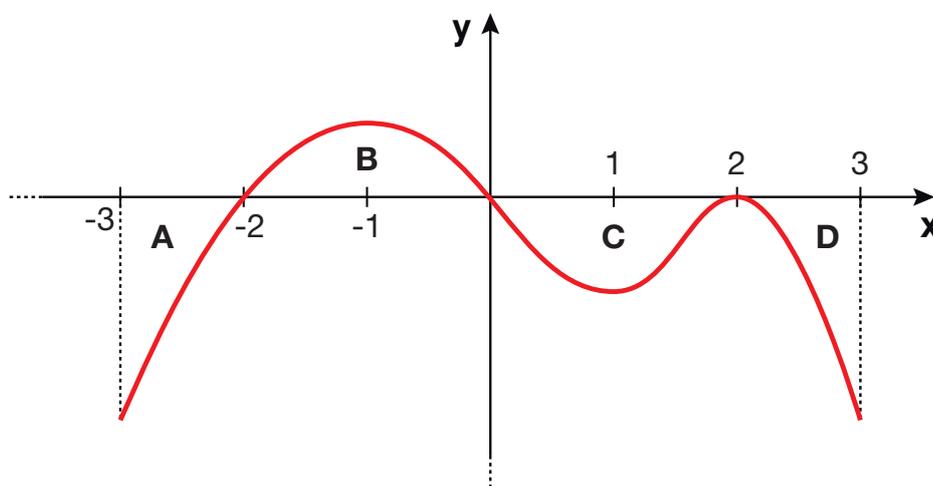
- Rappresenta il margine superiore della zona con una funzione polinomiale di secondo grado, verificando che il suo grafico passi per i tre punti A , B e C . Sul sito web dell’operatore compare la seguente affermazione: “nella zona rappresentata nella mappa risulta coperto dal segnale il 96% del territorio”; verifica se effettivamente è così.

L’operatore di telefonia modifica il piano tariffario, inserendo un sovrapprezzo di 10 centesimi per ogni minuto di conversazione successivo ai primi 500 minuti.

- Determina come cambiano, di conseguenza, le caratteristiche delle funzioni $f(x)$ e $g(x)$, riguardo agli asintoti, alla monotonia, continuità e derivabilità, individua eventuali massimi e minimi assoluti della funzione $g(x)$ e della sua derivata e spiegate il significato nella situazione concreta.

Problema 2

La funzione derivabile $y = f(x)$ ha, per $x \in [-3; 3]$, il grafico Γ , disegnato in figura. Γ presenta tangenti orizzontali per $x = -1$, $x = 1$, $x = 2$. Le aree delle regioni A , B , C e D sono rispettivamente 2, 3, 3 e 1. Sia $g(x)$ una primitiva di $f(x)$ tale che $g(3) = -5$.



1. Nel caso $f(x)$ fosse esprimibile con un polinomio, quale potrebbe essere il suo grado minimo? Illustra il ragionamento seguito.
2. Individua i valori di $x \in [-3; 3]$, per cui $g(x)$ ha un massimo relativo e determina i valori di x per i quali $g(x)$ volge la concavità verso l'alto.
3. Calcola $g(0)$ e, se esiste, il $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + g(x)}{2x}$.
4. Sia $h(x) = 3 \cdot f(2x + 1)$, determina il valore di $\int_{-2}^1 h(x) dx$.

Questionario

1. Determinare l'espressione analitica della funzione $y = f(x)$ sapendo che la retta $y = -2x + 5$ è tangente al grafico di f nel secondo quadrante e che $f'(x) = -2x^2 + 6$.
2. Dimostrare che il volume del tronco di cono è espresso dalla formula:

$$V = \frac{1}{3} \pi \cdot h \cdot (R^2 + r^2 + R \cdot r),$$

dove R ed r sono i raggi e h l'altezza.

3. Lanciando una moneta sei volte qual è la probabilità che si ottenga testa "al più" due volte? Qual è la probabilità che si ottenga testa "almeno" due volte?
4. Di quale delle seguenti equazioni differenziali la funzione $y = \frac{\ln(x)}{x}$ è soluzione?

$$y'' + 2 \cdot \frac{y'}{x} = y$$

$$y' + x \cdot y'' = 1$$

$$x \cdot y' = \frac{1}{x} + y$$

$$x^2 \cdot y'' + x \cdot y' + \frac{2}{x} = y$$

5. Determinare un'espressione analitica della retta perpendicolare nell'origine al piano di equazione $x + y - z = 0$.
6. Sia f la funzione, definita per tutti gli x reali, da

$$f(x) = (x - 1)^2 + (x - 2)^2 + (x - 3)^2 + (x - 4)^2 + (x - 5)^2,$$

determinare il minimo di f .

7. Detta $A(n)$ l'area del poligono regolare di n lati inscritto in un cerchio C di raggio r , verificare che $A(n) = \frac{n}{2}r^2\text{sen}\frac{2\pi}{n}$ e calcolarne il limite per $n \rightarrow \infty$.
8. I lati di un triangolo misurano, rispettivamente, 6 cm, 6 cm e 5 cm. Preso a caso un punto P all'interno del triangolo, qual è la probabilità che P disti più di 2 cm da tutti e tre i vertici del triangolo?
9. Data la funzione:

$$f(x) = \begin{cases} x^3 & 0 \leq x \leq 1 \\ x^2 - kx + k & 1 < x \leq 2 \end{cases}$$

determinare il parametro k in modo che nell'intervallo $[0; 2]$ sia applicabile il teorema di Lagrange e trovare il punto di cui la tesi del teorema assicura l'esistenza.

10. Il grafico della funzione $f(x) = \sqrt{x}$ ($x \in \mathbb{R}$, $x \geq 0$) divide in due porzioni il rettangolo $ABCD$ avente vertici $A(1; 0)$, $B(4; 0)$, $C(4; 2)$ e $D(1; 2)$. Calcolare il rapporto tra le aree delle due porzioni.

Durata massima della prova: 6 ore.

È consentito l'uso della calcolatrice non programmabile.

È consentito l'uso del dizionario bilingue (italiano-lingua del paese di provenienza) per i candidati di madrelingua non italiana.

Non è consentito lasciare l'Istituto prima che siano trascorse 3 ore dalla dettatura del tema.