PROVA D'ESAME • SESSIONE ORDINARIA 2016

Liceo scientifico e opzione scienze applicate*

Lo studente deve svolgere uno dei due problemi e rispondere a 5 quesiti del questionario.
Durata massima della prova: 6 ore.
È consentito l'uso della calcolatrice non programmabile.

PROBLEMA 1

L'amministratore di un piccolo condominio deve installare un nuovo serbatoio per il gasolio da riscaldamento. Non essendo soddisfatto dei modelli esistenti in commercio, ti incarica di progettarne uno che risponda alle esigenze del condominio.

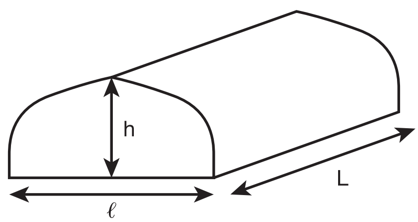

Figura 1

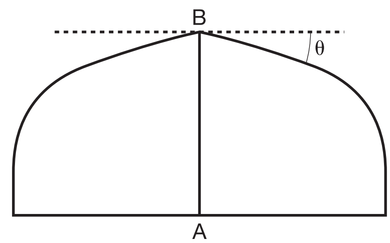

Figura 2

Allo scopo di darti le necessarie informazioni, l'amministratore ti fornisce il disegno in figura 1, aggiungendo le seguenti indicazioni:

- la lunghezza L del serbatoio deve essere pari a otto metri;
- la larghezza l del serbatoio deve essere pari a due metri;
- l'altezza h del serbatoio deve essere pari a un metro;
- il profilo laterale (figura 2) deve avere un punto angoloso alla sommità, per evitare l'accumulo di ghiaccio durante i mesi invernali, con un angolo $\theta \geq 10°$;
- la capacità del serbatoio deve essere pari ad almeno 13 m^3, in modo da garantire al condominio il riscaldamento per tutto l'inverno effettuando solo due rifornimenti di gasolio;
- al centro della parete laterale del serbatoio, lungo l'asse di simmetria (segmento AB in figura 2) deve essere installato un indicatore graduato che riporti la percentuale di riempimento V del volume del serbatoio in corrispondenza del livello z raggiunto in altezza dal gasolio.

1. Considerando come origine degli assi cartesiani il punto A in figura 2, individua tra le seguenti famiglie di funzioni quella che meglio può descrivere il profilo laterale del serbatoio per $x \in [-1; 1]$, k intero positivo, motivando opportunamente la tua scelta:

$$f(x) = (1 - |x|)^{\frac{1}{k}}, \qquad f(x) = -6|x|^3 + 9kx^2 - 4|x| + 1, \qquad f(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2}x^k\right).$$

2. Determina il valore di k che consente di soddisfare i requisiti richiesti relativamente all'angolo θ e al volume del serbatoio.

3. Al fine di realizzare l'indicatore graduato, determina l'espressione della funzione $V(z)$ che associa al livello z del gasolio (in metri) la percentuale di riempimento V del volume da riportare sull'indicatore stesso.

Quando consegni il tuo progetto, l'amministratore obietta che essendo il serbatoio alto un metro, il valore z del livello di gasolio, espresso in centimetri, deve corrispondere alla percentuale di riempimento: cioè, ad esempio, se il gasolio raggiunge un livello z pari a 50 cm vuol dire che il serbatoio è pieno al 50%; invece il tuo indicatore riporta, in corrispondenza del livello 50 cm, una percentuale di riempimento 59,7%.

---

* La prova è uguale a quella delle scuole italiane all'estero, Europa, 2016.

4. Illustra gli argomenti che puoi usare per spiegare all'amministratore che il suo ragionamento è sbagliato; mostra anche qual è, in termini assoluti, il massimo errore che si commette usando il livello z come indicatore della percentuale di riempimento, come da lui suggerito, e qual è il valore di z in corrispondenza del quale esso si verifica.

PROBLEMA 2

Nella figura 3 è rappresentato il grafico Γ della funzione continua $f: [0; +\infty[\to \mathbb{R}$, derivabile in $[0; +\infty[$, e sono indicate le coordinate di alcuni suoi punti.

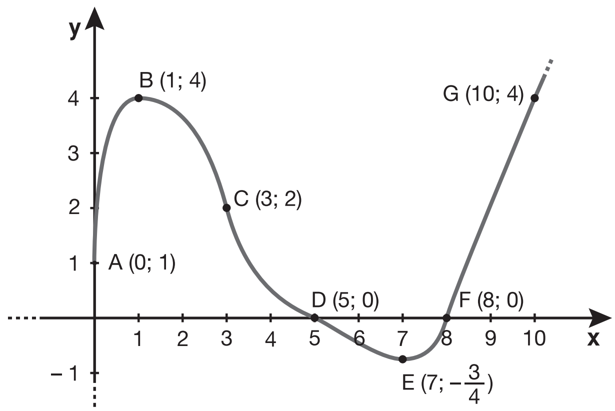

Figura 3

È noto che Γ è tangente all'asse y in A, che B ed E sono un punto di massimo e uno di minimo, che C è un punto di flesso con tangente di equazione $2x + y - 8 = 0$.
Nel punto D la retta tangente ha equazione $x + 2y - 5 = 0$ e per $x \geq 8$ il grafico consiste in una semiretta passante per il punto G. Si sa inoltre che l'area della regione delimitata dall'arco $ABCD$, dall'asse x e dall'asse y vale 11, mentre l'area della regione delimitata dall'arco DEF e dall'asse x vale 1.

1. In base alle informazioni disponibili, rappresenta indicativamente i grafici delle funzioni

$$y = f'(x), \qquad F(x) = \int_0^x f(t)\,dt.$$

Quali sono i valori di $f'(3)$ e $f'(5)$? Motiva la tua risposta.

2. Rappresenta, indicativamente, i grafici delle seguenti funzioni:

$$y = |f'(x)|, \qquad y = |f(x)|', \qquad y = \frac{1}{f(x)},$$

specificando l'insieme di definizione di ciascuna di esse.

3. Determina i valori medi di $y = f(x)$ e di $y = |f(x)|$ nell'intervallo [0; 8], il valore medio di $y = f'(x)$ nell'intervallo [1; 7] e il valore medio di $y = F(x)$ nell'intervallo [9; 10].

4. Scrivi le equazioni delle rette tangenti al grafico della funzione $F(x)$ nei suoi punti di ascisse 0 e 8, motivando le risposte.

QUESTIONARIO

1 È noto che

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}.$$

Stabilire se il numero reale u, tale che

$$\int_{-\infty}^{u} e^{-x^2}\,dx = 1$$

è positivo oppure negativo. Determinare inoltre i valori dei seguenti integrali, motivando le risposte:

$$A = \int_{-u}^{u} x^7 e^{-x^2}\,dx, \qquad B = \int_{-u}^{u} e^{-x^2}\,dx, \qquad C = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-5x^2}\,dx.$$

2 Data una parabola di equazione

$$y = 1 - ax^2, \qquad \text{con } a > 0$$

si vogliono inscrivere dei rettangoli, con un lato sull'asse x, nel segmento parabolico delimitato dall'asse x. Determinare a in modo tale che il rettangolo di area massima sia anche il rettangolo di perimetro massimo.

3 Un recipiente sferico con raggio interno r è riempito con un liquido fino all'altezza h. Utilizzando il calcolo integrale, dimostrare che il volume del liquido è dato da:

$$V = \pi \cdot \left(rh^2 - \frac{h^3}{3} \right).$$

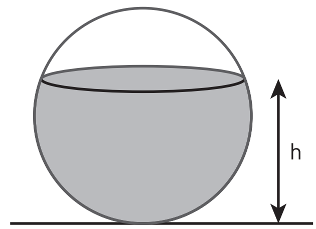

Figura 4

4 Un test è costituito da 10 domande a risposta multipla, con 4 possibili risposte di cui solo una è esatta. Per superare il test occorre rispondere esattamente almeno a 8 domande. Qual è la probabilità di superare il test rispondendo a caso alle domande?

5 Una sfera, il cui centro è il punto $K(-2; -1; 2)$, è tangente al piano Π avente equazione $2x - 2y + z - 9 = 0$. Qual è il punto di tangenza? Qual è il raggio della sfera?

6 Si stabilisca se la seguente affermazione è vera o falsa, giustificando la risposta:
«Esiste un polinomio $P(x)$ tale che $|P(x) - \cos(x)| \le 10^{-3}$, $\forall x \in \mathbb{R}$».

7 Una pedina è collocata nella casella in basso a sinistra di una scacchiera, come in figura. Ad ogni mossa, la pedina può essere spostata o nella casella alla sua destra o nella casella sopra di essa. Scelto casualmente un percorso di 14 mosse che porti la pedina nella casella d'angolo opposta A, qual è la probabilità che essa passi per la casella indicata con B?

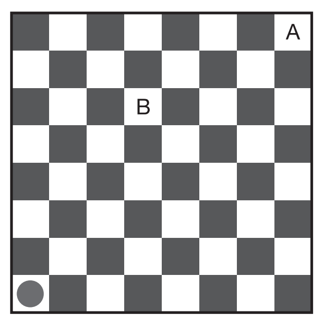

Figura 5

8 Data una funzione $f(x)$ definita in $\mathbb{R}$, $f(x) = e^x(2x + x^2)$, individuare la primitiva di $f(x)$ il cui grafico passa per il punto $(1; 2e)$.

9 Date le rette:

$$\begin{cases} x = t \\ y = 2t \\ z = t \end{cases} \qquad \begin{cases} x + y + z - 3 = 0 \\ 2x - y = 0 \end{cases}$$

e il punto $P(1; 0; -2)$ determinare l'equazione del piano passante per P e parallelo alle due rette.

10 Sia f la funzione così definita nell'intervallo $]1; +\infty[$:

$$f(x) = \int_e^{x^2} \frac{t}{\ln t}\, dt.$$

Scrivere l'equazione della retta tangente al grafico di f nel suo punto di ascissa $\sqrt{e}$.

PROBLEMA 1

1. Le funzioni proposte per ciascuna famiglia sono tutte simmetriche rispetto all'asse y, per ogni intero positivo k.

Affinché una funzione descriva il profilo laterale del serbatoio, è necessario che:

$$f(0)=1, \qquad f(\pm 1)=0, \qquad f'_+(0)\leq -\tan 10°, \qquad f'_-(0)\geq \tan 10°.$$

Esaminiamo il comportamento delle funzioni di ogni famiglia; per la simmetria, limitiamo il controllo agli x compresi fra 0 e 1.

Prima funzione

$$f(x)=\left(1-|x|\right)^{\frac{1}{k}}$$

$$f(0)=1^{\frac{1}{k}}=1; \qquad f(1)=0^{\frac{1}{k}}=0.$$

$$f'_+(x)=-\frac{1}{k}(1-x)^{\frac{1}{k}-1}; \qquad f'_+(0)=-\frac{1}{k}\cdot 1^{\frac{1}{k}-1}=-\frac{1}{k}.$$

$$f'_+(0)\leq -\tan 10° \simeq -0,176 \text{ per } -\frac{1}{k}\leq -0,176 \to k\leq \frac{1}{0,176} \to k\leq 5,68.$$

Poiché k è intero positivo, basta scegliere k fra 1, 2, 3, 4 e 5 affinché la funzione descriva il profilo del serbatoio.

Seconda funzione

$$f(x)=-6|x|^3+9kx^2-4|x|+1$$

$$f(0)=-6\cdot 0+9k\cdot 0-4\cdot 0+1=1;$$

$$f(1)=-6\cdot 1+9k\cdot 1-4\cdot 1+1=9k-9 \to f(1)=0 \text{ per } k=1.$$

$f'_+(x)=-18x^2+18kx-4$, che per $k=1$ diventa $f'_+(x)=-18x^2+18x-4$;

$$f'_+(0)=-4\leq -\tan 10°.$$

Notiamo però che la derivata seconda $f''_+(x)=-36x+18$ si annulla in $x=\frac{1}{2}$, è positiva prima e negativa dopo. La funzione $f(x)$ volge dunque la concavità verso l'alto in $\left]0;\frac{1}{2}\right[$ e verso il basso in $\left]\frac{1}{2};1\right[$, quindi non può descrivere il profilo del serbatoio.

Terza funzione

$$f(x)=\cos\left(\frac{\pi}{2}x^k\right)$$

$$f(0)=\cos(0)=1; \qquad f(1)=\cos\left(\frac{\pi}{2}\right).$$

$$f'_+(x)=-\frac{\pi}{2}kx^{k-1}\sin\left(\frac{\pi}{2}x^k\right); \qquad f'_+(0)=0.$$

Quindi $f'_+(0)>-\tan 10°$ e $f(x)$ non può descrivere il profilo del serbatoio.

In conclusione, il profilo del serbatoio è descritto dalla famiglia di funzioni:

$$f(x)=\left(1-|x|\right)^{\frac{1}{k}}, \text{ per } k=1, 2, 3, 4, 5.$$

2. Il volume del serbatoio è dato dall'area della sezione trasversale moltiplicata per la lunghezza del serbatoio stesso:

$$V = S \cdot L = \left(2 \cdot \int_0^1 (1-x)^{\frac{1}{k}}\,dx\right) \cdot 8 = 16 \cdot \int_0^1 (1-x)^{\frac{1}{k}}\,dx = 16 \cdot \left[-\frac{(1-x)^{\frac{1}{k}+1}}{\left(\frac{1}{k}+1\right)}\right]_0^1 =$$

$$16 \cdot \left[-\frac{(1-x)^{\frac{k+1}{k}}}{\frac{k+1}{k}}\right]_0^1 = 16 \cdot \frac{1}{\frac{k+1}{k}} = \frac{16k}{k+1}.$$

Imponiamo che il volume sia almeno di 13 m^3:

$$\frac{16k}{k+1} \geq 13 \to 16k \geq 13k + 13 \to k \geq \frac{13}{3}.$$

Considerando che k è intero e compreso fra 1 e 5 e $\frac{13}{3} \simeq 4{,}3$, deduciamo che $k = 5$.

Sostituiamo $k = 5$ nell'espressione del volume e otteniamo:

$$\frac{16 \cdot 5}{5+1} = \frac{80}{6} = \frac{40}{3}.$$

Il volume è dunque $\frac{40}{3}$ m^3.

Poiché $\frac{40}{3} \simeq 13{,}3$, il serbatoio con questo profilo ha volume maggiore dei 13 m^3 richiesti.

3. Fissato il livello z di riempimento del serbatoio, rimane individuata l'ascissa x_z tale che

$$f(x_z) = z \to (1-x_z)^{\frac{1}{5}} = z \to x_z = 1 - z^5.$$

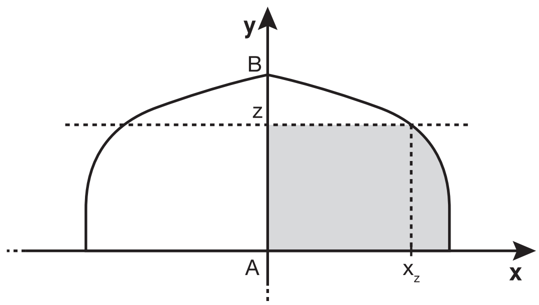

Figura 6

In questo caso, il serbatoio contiene il seguente volume di gasolio (espresso in metri cubi):

$$V(z) = 2\left[z \cdot x_z + \int_{x_z}^1 (1-x)^{\frac{1}{5}}\,dx\right] \cdot 8 = 16\left[z(1-z^5) + \int_{1-z^5}^1 (1-x)^{\frac{1}{5}}\,dx\right] =$$

$$16z - 16z^6 - 16 \cdot \frac{5}{6}\left[(1-x)^{\frac{6}{5}}\right]_{1-z^5}^1 = 16z - 16z^6 - \frac{40}{3}\left[0 - (1 - 1 + z^5)^{\frac{6}{5}}\right] =$$

$$16z - 16z^6 + \frac{40}{3}z^6 = 16z - \frac{8}{3}z^6.$$

La percentuale di serbatoio riempito, quando il livello di gasolio è alla quota z, è espressa dal rapporto:

$$P(z) = \frac{V(z)}{V} \cdot 100 = \frac{16z - \frac{8}{3}z^6}{\frac{40}{3}} \cdot 100 = 120z - 20z^6.$$

4. In base alla formula precedente quando il livello del serbatoio raggiunge i 50 cm, cioè 0,5 m, l'indicatore mostra una percentuale di riempimento pari a:

$$120 \cdot \frac{1}{2} - 20 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^6 = 60 - \frac{20}{64} \simeq 59{,}7 \to 59{,}7\%.$$

La percentuale del 50% indicata dall'amministratore è sbagliata perché la sezione trasversale del serbatoio non è un rettangolo, forma che porterebbe ad avere una proporzionalità diretta fra la quota z raggiunta e la percentuale di riempimento del serbatoio. In questo caso, invece, il profilo curvo porta il serbatoio a essere più capiente nella parte bassa rispetto alla parte alta; pertanto, quando il gasolio raggiunge la metà altezza, il serbatoio è riempito per più del 50%. Secondo l'amministratore, la percentuale di riempimento sarebbe espressa (con z misurato in metri) dal rapporto:

$$P_a(z) = \frac{z}{1} \cdot 100 = 100z.$$

La differenza fra le due percentuali è pari a $d(z) = 120z - 20z^6 - 100z = 20z - 20z^6$.
Osserviamo che $d(0) = d(1) = 0$, a conferma che le due percentuali (0% e 100%) coincidono a serbatoio vuoto e pieno. Cerchiamo il massimo per la funzione $d(z)$. Calcoliamo la derivata prima:

$$d'(z) = 20 - 120z^5,$$

e studiamo il suo segno:

$$d'(z) = 0 \to 20 - 120z^5 = 0 \to z = \frac{1}{\sqrt[5]{6}} \simeq 0{,}7;$$

$$d'(z) > 0 \text{ per } 0 < z < \frac{1}{\sqrt[5]{6}} \text{ e } d'(z) < 0 \text{ per } \frac{1}{\sqrt[5]{6}} < z < 1.$$

La funzione differenza $d(z)$ è quindi crescente per $0 < z < \frac{1}{\sqrt[5]{6}}$ e decrescente per $\frac{1}{\sqrt[5]{6}} < z < 1$.

L'errore massimo nella valutazione della percentuale si ha in corrispondenza della quota $z = \frac{1}{\sqrt[5]{6}}$ e vale:

$$d\left(\frac{1}{\sqrt[5]{6}}\right) = 20 \cdot \frac{1}{\sqrt[5]{6}} - 20 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt[5]{6}}\right)^6 = \frac{20}{\sqrt[5]{6}}\left(1 - \frac{1}{6}\right) = \frac{50}{3\sqrt[5]{6}} \simeq 11{,}6 \to 11{,}6\%.$$

PROBLEMA 2

1. Per prima cosa determiniamo l'espressione analitica della funzione f per $x \geq 8$.

$$\frac{x-8}{2} = \frac{y}{4} \to y = 2x - 16.$$

Del grafico di $f'(x)$ possiamo dire che:

- In $x = 0$ deve presentare un asintoto verticale; in particolare $\lim_{x \to 0^+} f'(x) = +\infty$. Questo perché il grafico di $f(x)$ è tangente all'asse y nel punto A e a destra del punto f è crescente.
- Per $0 < x < 1$ risulta $f'(x) > 0$ perché $f(x)$ è crescente.
- In $x = 1$, f' deve essere nulla perché B è un punto stazionario di f.
- In $x = 3$ conosciamo la tangente e sappiamo che essa ha coefficiente angolare -2. Pertanto $f'(3) = -2$. Il punto $(3; -2)$ è un minimo locale per la funzione f'; infatti sappiamo dal testo che C è un flesso di f.
- Anche in $x = 5$ conosciamo la tangente; analogamente al punto sopra, possiamo affermare che
  $$f'(5) = -\frac{1}{2}.$$
- Per $1 < x < 7$ risulta $f'(x) < 0$ perché $f(x)$ è decrescente.
- $f'(7) = 0$ perché E è un punto stazionario.
- Per $7 < x < 8$ risulta $f'(x) > 0$ perché $f(x)$ è crescente.
- Per $x \geq 8$ risulta che $f'(x) = 2$ perché la semiretta passante per F e G ha coefficiente angolare 2.

Possiamo dunque tracciare il grafico indicativo della funzione f' (figura 7).

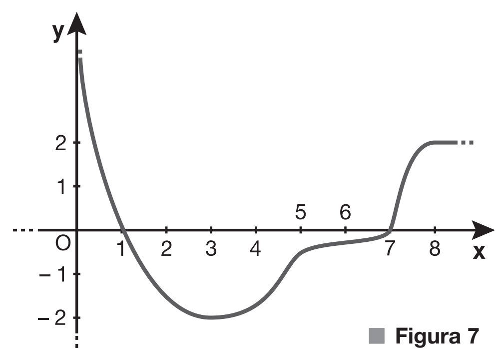

Figura 7

Per tracciare il grafico della funzione integrale F possiamo fare una serie di considerazioni.

- Osserviamo che $F(5) = 11$ e $F(8) = 11 - 1 = 10$. Infatti

$$F(8) = \int_0^8 f(x)dx = \int_0^5 f(x)dx + \int_5^8 f(x)dx = 11 - 1 = 10.$$

  Ai valori $x = 5$ e $x = 8$ corrisponderanno punti stazionari di F perché sono zeri di f.
- $F'(x) = f(x)$ e quindi $F''(x) = f'(x)$. Dall'analisi del grafico di $f'(x)$ deduciamo che $f'(x) > 0$ per $0 < x < 1$ o $x > 7$ e quindi in questi intervalli $F(x)$ volge la concavità verso l'alto.
- Sul piano qualitativo possiamo dire che in corrispondenza dei valori $x = 1$ e $x = 7$ F presenterà dei flessi perché in B e in E f ha due punti stazionari.
- Per $x \geq 8$ il grafico di F avrà l'andamento della parabola di equazione $y = x^2 - 16x + 74$. Infatti su questo intervallo la funzione f coincide con la semiretta $y = 2x - 16$, dunque:

$$F(x) = \int_0^8 f(t)dt + \int_8^x (2t - 16)dt = 10 + [t^2 - 16t]_8^x = x^2 - 16x + 74.$$

Otteniamo quindi una funzione che ha l'andamento qualitativo riportato a lato.
Come già osservato in precedenza, conosciamo i valori di $f'(3) = -2$ e $f'(5) = -\frac{1}{2}$; li avevamo ricavati interpretando la pendenza delle due tangenti assegnate dal testo come valore della derivata di f.

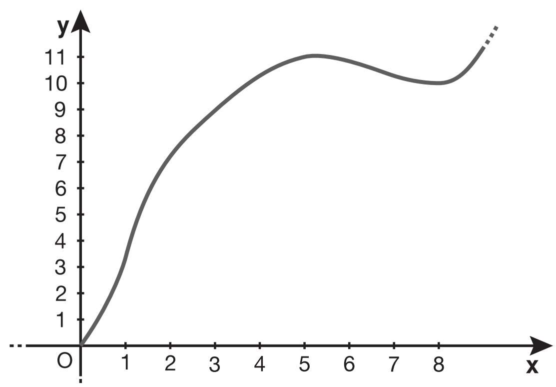

Figura 8

2. - Per ottenere il grafico di $y = |f'(x)|$ è sufficiente simmetrizzare i valori negativi di f' rispetto all'asse x, ribaltandoli dal quarto al primo quadrante.
  L'insieme di definizione di $y = |f'(x)|$ coincide con quello di $y = f'(x)$, ed è dunque $]0; +\infty[$ (il valore $x = 0$ va escluso perché in corrispondenza di esso f presenta un asintoto verticale).

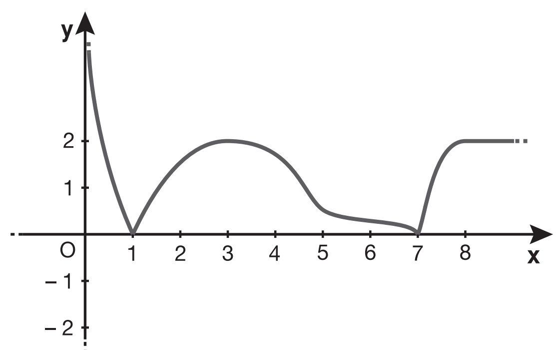

Figura 9

- Per ottenere il grafico di $y = |f(x)|'$ distinguiamo i valori positivi di f da quelli negativi. Per i valori strettamente positivi $|f| = f$, dunque $|f|' = f'$: il grafico ha l'andamento già mostrato in figura 7.
  Per i valori strettamente negativi, $|f| = -f$, dunque $|f|' = -f'$: il grafico si ottiene sottoponendo quello di f' alla simmetria di asse x già menzionata in precedenza.
  Il grafico cercato ha il seguente andamento qualitativo.

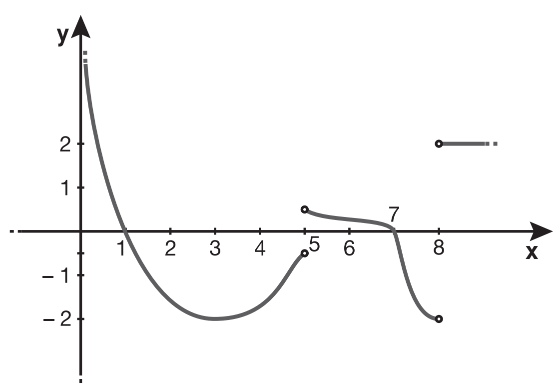

Figura 10

I valori $x = 5$ e $x = 8$ in cui f risulta nulla non appartengono all'insieme di definizione di $|f|'$; infatti $\lim_{x \to 5^+} f'(x) \neq \lim_{x \to 5^-} f(x)$ e $\lim_{x \to 8^+} f'(x) \neq \lim_{x \to 8^-} f(x)$ come emerge chiaramente dal grafico. L'insieme di definizione di $y = |f|'$ risulta quindi essere $]0; +\infty[- \{5; 8\}$.

- Tracciamo ora il grafico di $y = \frac{1}{f(x)}$. L'insieme di definizione è $]0; +\infty[- \{5; 8\}$. Cominciamo col calcolare, dove è possibile, il reciproco dei valori della funzione già noti.

$$A': x_{A'} = x_A = 0;\ y_{A'} = \frac{1}{y_A} = 1 \to A'(0;1)$$

$$B': x_{B'} = x_B = 1;\ y_{B'} = \frac{1}{y_B} = \frac{1}{4} \to B'\left(1; \frac{1}{4}\right)$$

$$C': x_{C'} = x_C = 3;\ y_{C'} = \frac{1}{y_C} = \frac{1}{2} \to C'\left(3; \frac{1}{2}\right)$$

$$E': x_{E'} = x_E = 7;\ y_{E'} = \frac{1}{y_E} = -\frac{4}{3} \to E'\left(7; -\frac{4}{3}\right)$$

$$G': x_{G'} = x_G = 10;\ y_{G'} = \frac{1}{y_G} = \frac{1}{4} \to G'\left(10; \frac{1}{4}\right)$$

Inoltre, sappiamo che $\frac{1}{f}$ non si annulla mai ed è positiva quando f è positiva, negativa quando f è negativa. Nei punti D e F f assume valore nullo; pertanto $\frac{1}{f}$ presenterà in corrispondenza di $x = 5$ e $x = 8$ asintoti verticali. Inoltre, $\frac{1}{f}$ cresce quando f decresce e decresce quando f cresce.

Per $x \geq 8$ possiamo scrivere l'espressione analitica di $\frac{1}{f}$: $y = \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{2x - 16}$.

Questa è l'equazione di un'iperbole equilatera di assi $y = 0$ e $x = 8$.
Per avere un'idea più precisa dell'andamento calcoliamo la derivata nei punti in cui abbiamo informazioni sufficienti per farlo.
L'espressione generale della derivata è:

$$y' = -\frac{f'(x)}{f(x)^2}.$$

In $x = 3$ otteniamo $y' = -\frac{-2}{4} = \frac{1}{2}$; in $x = 0$, $\lim_{x \to 0} f'(x) = +\infty$, dunque $\lim_{x \to 0} -\frac{f'(x)}{f(x)^2} = -\infty$.

A questo punto, tracciamo il grafico.

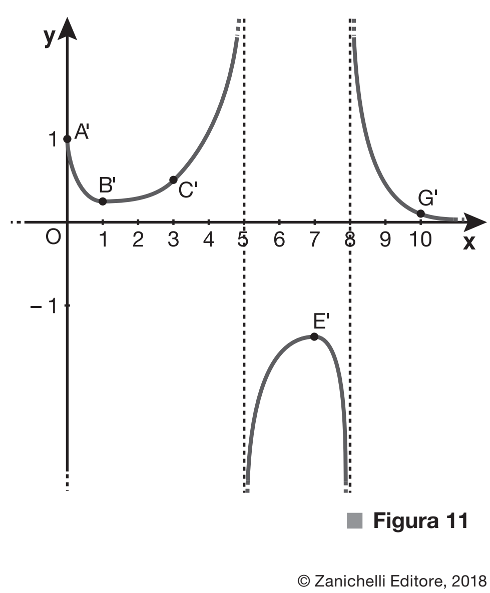

Figura 11

3. Ricordiamo la definizione di media integrale: la media integrale della funzione f sull'intervallo $[x_1; x_2]$ è il rapporto:

$$\frac{\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx}{x_2 - x_1}.$$

Per valutare gli integrali ricorriamo alle informazioni relative alle aree fornite dal testo.
Calcoliamo il valor medio di f nell'intervallo $[0; 8]$:

$$\frac{\int_0^8 f(x)dx}{8} = \frac{10}{8} = \frac{5}{4} = 1{,}25.$$

Calcoliamo il valor medio di $|f|$ nell'intervallo $[0; 8]$:

$$\frac{\int_0^8 |f(x)|dx}{8} = \frac{11+1}{8} = \frac{12}{8} = \frac{3}{2} = 1{,}5.$$

Calcoliamo il valor medio di f' nell'intervallo [1; 7] ricorrendo al teorema fondamentale del calcolo integrale:

$$\frac{\int_1^7 f'(x)dx}{6} = \frac{[f(x)]_1^7}{6} = \frac{-\frac{3}{4}-4}{6} = -\frac{19}{24} = -0,791\overline{6}.$$

Per determinare l'ultimo integrale ricordiamo che, nell'intervallo in esame, la funzione F coincide con un arco di parabola di equazione $y = x^2 - 16x + 74$:

$$\frac{\int_9^{10} F(x)dx}{1} = \int_9^{10}(x^2 - 16x + 74)dx =$$

$$= \left[\frac{1}{3}x^3 - 8x^2 + 74x\right]_9^{10} = \frac{1000}{3} - 800 + 740 - 243 + 648 - 666 = 12,\overline{3}.$$

4. Essendo F la funzione integrale di f, il coefficiente angolare della tangente a F nel punto di ascissa x è $f(x)$. Infatti per definizione f è la derivata di F.
Deduciamo quindi che la tangente a F in $x = 0$ è una retta di pendenza $1 = f(0)$. Questa retta passa dall'origine perché $F(0) = \int_0^0 f(x)dx = 0$. La retta è dunque $y = x$.
Analogamente la pendenza della tangente in $x = 8$ è 0; poiché $F(8) = 10$, la tangente cercata è la retta orizzontale $y = 10$.

QUESTIONARIO

1 Osserviamo innanzitutto che l'integrale indefinito $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx$ non è risolvibile analiticamente. Di conseguenza, abbozziamo il grafico della funzione $f(x) = e^{-x^2}$.
Osserviamo che la funzione $f(x) = e^{-x^2}$ è una gaussiana centrata nell'origine.
Ricordiamo le sue proprietà.
La funzione è definita e continua su tutto $\mathbb{R}$. È pari perché:

$$f(-x) = e^{-(-x)^2} = e^{-x^2} = f(x),\ \forall x \in \mathbb{R},$$

perciò il grafico della funzione è simmetrico rispetto all'asse y. La funzione è positiva su tutto $\mathbb{R}$ perché è una funzione esponenziale. Ha un asintoto orizzontale, $y = 0$, perché $\lim_{x\to\pm\infty} e^{-x^2} = 0$. Infine, $f'(x) = -2xe^{-x^2} > 0$ se e solo se $x < 0$, ovvero la funzione è crescente in $]-\infty; 0[$ e decrescente in $]0; +\infty[$ e assume il suo massimo assoluto in 0.

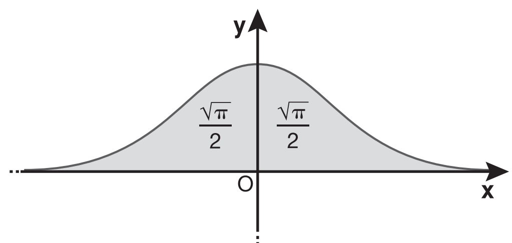

Figura 12

Notiamo che:

$$\int_{-\infty}^{0} e^{-x^2}dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

La funzione $F(x) = \int_{-\infty}^{x} e^{-t^2}dt$ è monotona crescente. Infatti, $F'(x) = e^{-x^2} > 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$.

Poiché $F(0) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ e $F(u) = 1 > \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, quindi $u > 0$.

Determiniamo i valori integrali A, B e C.
Per calcolare l'integrale A, osserviamo che la funzione $f(x) = x^7 e^{-x^2}$ è dispari. Infatti,

$$f(-x) = (-x)^7 e^{-(-x)^2} = -x^7 e^{-x^2} = -f(-x),\ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Possiamo concludere che $\int_{-u}^{+u} x^7 e^{-x^2} dx = 0$

perché $\int_{-u}^{0} x^7 e^{-x^2} dx = -\int_{0}^{u} x^7 e^{-x^2} dx$.

Per calcolare B, possiamo suddividere l'area al di sotto del grafico della funzione in tre parti, aventi area D, B ed E.

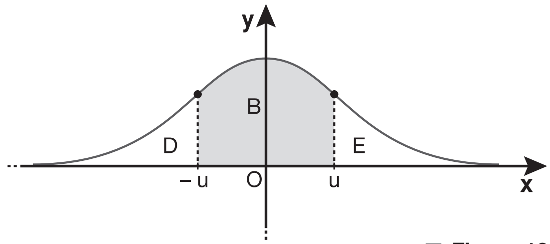

Figura 13

Notiamo che $D = E$ per simmetria e che:

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx - \int_{-\infty}^{u} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi} - 1.$$

Di conseguenza:

$$B = \int_{-u}^{u} e^{-x^2} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx - 2E = \sqrt{\pi} - 2(\sqrt{\pi} - 1) = 2 - \sqrt{\pi}.$$

Calcoliamo l'integrale C:

$$C = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-5x^2} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(\sqrt{5}x)^2} dx.$$

Sostituiamo $y = \sqrt{5}\,x \to x = \frac{y}{\sqrt{5}}$, $dx = \frac{dy}{\sqrt{5}}$, per $x \to -\infty$, $y \to -\infty$ e per $x \to +\infty$, $y \to +\infty$.

Quindi:

$$C = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} \frac{dy}{\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} dy = \sqrt{\frac{\pi}{5}}.$$

2 Per qualunque valore di $a > 0$ la parabola è simmetrica rispetto all'asse y, passa per il punto $(0; 1)$ e per i punti $\left(\pm\frac{1}{\sqrt{a}}; 0\right)$ e ha concavità verso il basso. Il punto generico P della parabola ha coordinate $(x_P; 1 - ax_P^2)$.

Il rettangolo inscritto nel segmento parabolico delimitato dall'asse x ha vertici di coordinate $A(x_P; 0)$, $B(x_P; 1 - ax_P^2)$, $C(-x_P; 1 - ax_P^2)$ e $D(-x_P; 0)$, con la condizione $0 \le x_P \le \frac{1}{\sqrt{a}}$.

Possiamo esprimere perimetro e area del rettangolo $ABCD$ come funzioni dell'ascissa x_P:

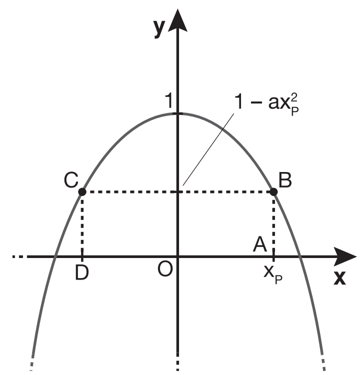

Figura 14

$$2p(x_P) = 4x_P + 2(1 - ax_P^2) \to 2p(x_P) = -2ax_P^2 + 4x_P + 2;$$

$$A(x_P) = 2x_P(1 - ax_P^2) = 2(x_P - ax_P^3), \text{ con } 0 \le x_P \le \frac{1}{\sqrt{a}}.$$

Per determinare per quale valore di a l'area del rettangolo è massima calcoliamo la derivata prima della funzione che esprime l'area e studiamone il segno:

$$A'(x_P) = 2 - 6ax_P^2 \quad \text{con } 0 \le x_P \le \frac{1}{\sqrt{a}}.$$

$$A'(x_P) = 0 \to 2 - 6ax_P^2 = 0 \to 3ax_P^2 = 1 \to x_P = \pm\frac{\sqrt{3a}}{3a}.$$

La radice esiste sempre poiché, per ipotesi, $a > 0$.

Siccome siamo interessati all'ascissa positiva consideriamo $x_P = \frac{\sqrt{3a}}{3a}$ e osserviamo che $x_P < \frac{1}{\sqrt{a}}\ \forall a > 0$.

$$A'(x_P) > 0 \to 3ax_P^2 < 1 \to 0 < x_P < \frac{\sqrt{3a}}{a}.$$

$$A'(x_P) < 0 \to \frac{\sqrt{3a}}{3a} < x_P < \frac{1}{\sqrt{a}}.$$

Quindi $x_P = \frac{\sqrt{3a}}{3a}$ è punto di massimo ed è un punto interno all'intervallo $\left[0; \frac{1}{\sqrt{a}}\right]$.

Procediamo allo stesso modo per determinare per quale valore di x_P il perimetro assume valore massimo. Calcoliamo la derivata prima e studiamo il suo segno:

$$2p'(x_P) = -4ax_P + 4 \quad \text{con } 0 \le x_P \le \frac{1}{\sqrt{a}}.$$

$$2p'(x_P) = 0 \rightarrow -4ax_P + 4 = 0 \rightarrow x_P = \frac{1}{a}.$$

Osserviamo che $\frac{1}{a} < \frac{1}{\sqrt{a}}$ per $a > 1$ e che $\frac{1}{a} \ge \frac{1}{\sqrt{a}}$ per $0 < a \le 1$.

$$2p'(x_P) > 0 \rightarrow x_P < \frac{1}{a}.$$

$$2p'(x_P) < 0 \rightarrow x_P > \frac{1}{a}.$$

Quindi $x_P = \frac{1}{a}$ è punto di massimo se $a > 1$, ossia se x_P è interno a $\left[0; \frac{1}{\sqrt{a}}\right]$.

Uguagliamo le due espressioni in a che abbiamo trovato per x_P per determinare il valore di a:

$$\frac{\sqrt{3a}}{3a} = \frac{1}{a} \rightarrow a = 3, \text{ che è accettabile perché } 3 > 1.$$

L'equazione della parabola che soddisfa le condizioni del problema è: $y = 1 - 3x^2$.

3 Per comodità rappresentiamo il recipiente orientato orizzontalmente.
Il recipiente sferico di raggio r può essere rappresentato come la sfera ottenuta dalla rotazione di un angolo π di una circonferenza di equazione $x^2 + y^2 = r^2$, centrata nell'origine di un sistema cartesiano Oxy e di diametro $2r$.

Sia P il punto che rappresenta il livello raggiunto dal liquido. La sua ascissa vale $h - r$, con $h > r$.

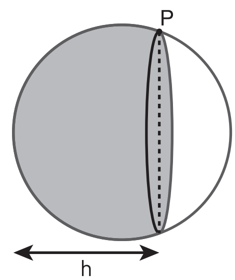

Figura 15

Lo spazio occupato dal liquido nel recipiente corrisponde alla calotta sferica generata dalla rotazione dell'arco AP. Determiniamone il volume V.
L'equazione dell'arco AP è:

$$f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}, \text{ con } -r \le x \le h - r.$$

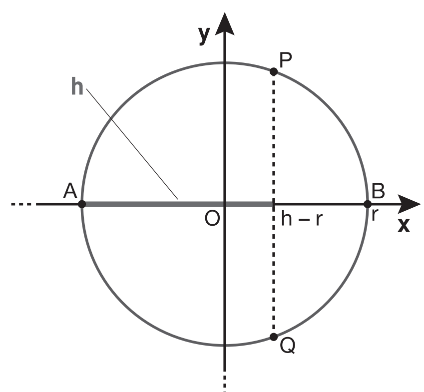

Figura 16

Calcoliamo il volume del recipiente sferico:

$$V = \pi \int_{-r}^{h-r} [f(x)]^2 dx = \pi \int_{-r}^{h-r} (r^2 - x^2) dx = \pi \left[r^2 x - \frac{x^3}{3} \right]_{-r}^{h-r} = \pi \left[r^2 (h - r) - \frac{(h-r)^3}{3} + r^3 - \frac{r^3}{3} \right] =$$

$$\pi \left[r^2 h - r^3 - \frac{h^3}{3} + \frac{r^3}{3} + h^2 r - hr^2 + r^3 - \frac{r^3}{3} \right] = \pi \left(h^2 r - \frac{h^3}{3} \right).$$

4 Consideriamo la variabile casuale X corrispondente al numero di risposte esatte. Per ognuna delle domande, la probabilità di dare la risposta corretta è $\frac{1}{4}$. La variabile casuale X ha quindi una distribuzione di probabilita binomiale (o di Bernoulli) di parametri $n = 10$ e $p = \frac{1}{4}$.

Questo significa che la probabilità che le risposte esatte siano x è:

$$P(X = x) = \binom{10}{x}\left(\frac{1}{4}\right)^x\left(\frac{3}{4}\right)^{10-x},$$

con $x \in \{0, 1, 2, \ldots, 10\}$.
La probabilità di superare il test è dunque:

$$P(X \geq 8) = P(X = 8) + P(X = 9) + P(X = 10) =$$

$$\binom{10}{8}\left(\frac{1}{4}\right)^8\left(\frac{3}{4}\right)^2 + \binom{10}{9}\left(\frac{1}{4}\right)^9\left(\frac{3}{4}\right)^1 + \binom{10}{10}\left(\frac{1}{4}\right)^{10}\left(\frac{3}{4}\right)^0 =$$

$$\frac{10 \cdot 9}{2} \cdot \frac{1}{4^8} \cdot \frac{3^2}{4^2} + 10 \cdot \frac{1}{4^9} \cdot \frac{3}{4} + 1 \cdot \frac{1}{4^{10}} \cdot 1 = \frac{405}{4^{10}} + \frac{30}{4^{10}} + \frac{1}{4^{10}} = \frac{436}{4^{10}} \simeq 4 \cdot 10^{-4}.$$

5 Determiniamo il punto di tangenza T tra la sfera di centro $K(-2; -1; 2)$ e il piano di equazione π: $2x - 2y + z - 9 = 0$.
Il punto T è l'intersezione tra il piano π e la retta s ortogonale a π che passa per K.
Determiniamo un'equazione vettoriale della retta s.
In generale, se un piano ha equazione $ax + by + cx + d = 0$ il vettore $\vec{n} = (a; b; c)$ è ortogonale al piano.
Quindi nel nostro caso il vettore $(2; -2; 1)$ è ortogonale al piano π e un'equazione vettoriale di s quindi è:

$$(x; y; z) = (-2; -1; 2) + t(2; -2; 1)$$

con t numero reale. Scriviamo l'equazione in forma parametrica:

$$\begin{cases} x = -2 + 2t \\ y = -1 - 2t \\ z = 2 + t \end{cases}$$

Sostituiamo nell'equazione del piano π le espressioni trovate per x, y e z:

$$2(-2 + 2t) - 2(-1 - 2t) + (2 + t) - 9 = 0$$

$$-4 + 4t + 2 + 4t + 2 + t - 9 = 0$$

$$t = 1.$$

Per $t = 1$ troviamo il punto $T(0; -3; 3)$, che è il punto di tangenza cercato.

Determiniamo ora il raggio della sfera, ossia la lunghezza del segmento TK:

$$TK = \sqrt{(-2-0)^2 + (-1+3)^2 + (2-3)^2} = \sqrt{4+4+1} = 3.$$

La sfera quindi ha raggio 3.

Per completare lo svolgimento, anche se non è esplicitamente richiesto dal quesito, osserviamo che un'equazione della sfera è:

$$(x+2)^2 + (y+1)^2 + (z-2)^2 = 9.$$

6 Qualunque polinomio $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0$, di grado $n \geq 1$, ha limite

$$\lim_{x \to \pm\infty} |P(x)| = +\infty.$$

Poiché $y = \cos x$ è una funzione limitata, i cui valori sono compresi tra -1 e $+1$, abbiamo

$$\lim_{x \to \pm\infty} |P(x) - \cos x| = \lim_{x \to \pm\infty} |P(x)| = +\infty,$$

che è quindi maggiore di 10^{-3}.
D'altra parte, per un polinomio di grado zero, $P(x) = k$, risulta

$$|P(x) - \cos x| = |k - \cos x|.$$

Poiché $y = \cos x$ è una funzione limitata, i cui valori sono compresi tra -1 e $+1$, si ha

$$\max_{x \in \mathbb{R}} |k - \cos x| = |k| + 1 > 10^{-3}.$$

È quindi falso affermare che esista un polinomio $P(x)$ tale che

$$|P(x) - \cos x| \leq 10^{-3}, \forall x \in \mathbb{R}.$$

7 Osserviamo per prima cosa che ogni percorso dalla casella iniziale alla casella indicata con A è costituito da 7 mosse della pedina verso destra e da 7 mosse verso l'alto, che possono essere effettuate in qualunque ordine. Il numero totale dei percorsi possibili è uguale quindi al numero di modi in cui si possono scegliere le mosse verso destra tra le 14 mosse da effettuare (le mosse verso l'alto saranno quindi le 7 mosse rimanenti). Pertanto, il numero di percorsi è:

$$C_{14,7} = \binom{14}{7} = \frac{14!}{7!7!} = 3432.$$

Calcoliamo adesso il numero di percorsi dalla casella iniziale alla casella A che passano per la casella B. Ciascuno di questi percorsi può essere scomposto in un percorso dalla casella iniziale a B e in un percorso dalla casella B alla casella A.
Per andare dalla posizione iniziale a B bisogna compiere 8 mosse, di cui 3 verso destra e 5 verso l'alto. Quindi il numero di percorsi è:

$$C_{8,3} = \binom{8}{3} = \frac{8!}{3!5!} = 56.$$

Per andare da B ad A bisogna compiere altre 6 mosse, di cui 4 verso destra e 2 verso l'alto. Quindi il numero di percorsi è:

$$C_{6,4} = \binom{6}{4} = \frac{6!}{4!2!} = 15.$$

Quindi, per andare dalla posizione iniziale ad A passando per B possiamo scegliere uno qualunque dei percorsi dalla posizione iniziale a B e uno qualunque dei percorsi da B ad A. In totale, sono:

$$C_{8,3} \cdot C_{6,4} = \binom{8}{3}\binom{6}{4} = 56 \cdot 15 = 840.$$

La probabilità cercata è uguale al rapporto tra il numero di percorsi passanti per B e il numero totale di percorsi:

$$P = \frac{C_{8,3} \cdot C_{6,4}}{C_{14,7}} = \frac{\binom{8}{3}\binom{6}{4}}{\binom{14}{7}} = \frac{840}{3432} = \frac{35}{143} \simeq 24,5\%.$$

Con un ragionamento simile, i percorsi dal punto iniziale ad A possono essere ottenuti dalle permutazioni con ripetizione di 14 elementi di cui 7 uguali (mosse verso l'alto) e 7 uguali (mosse verso destra) per un totale di:

$$P_{14}^{(7;7)} = \frac{14!}{7!7!} = 3432 \text{ percorsi.}$$

Nello stesso modo calcoliamo il numero dei percorsi dal punto iniziale a B:

$$P_8^{(5;\,3)} = \frac{8!}{5!3!} = 56$$

e da B ad A:

$$P_6^{(4;\,2)} = \frac{6!}{4!2!} = 15.$$

Otteniamo i casi favorevoli dal prodotto $P_8^{(5;\,3)} \cdot P_6^{(4;\,2)} = 56 \cdot 15 = 840$. Quindi, la probabilita è:

$$P = \frac{\text{casi favorevoli}}{\text{casi possibili}} = \frac{840}{3432} = \frac{35}{143}.$$

Osserviamo che il risultato è lo stesso che avevamo ottenuto con il metodo precedente.

8 Consideriamo la funzione $f(x) = e^x(2x + x^2)$ definita in $\mathbb{R}$. Determiniamo l'insieme di tutte le sue primitive $G(x) = F(x) + c$ con $c \in \mathbb{R}$ calcolando l'integrale indefinito:

$$G(x) = \int f(x)dx = \int e^x(2x + x^2)dx.$$

Calcoliamo l'integrale applicando più volte il metodo di integrazione per parti:

$$\int e^x(2x + x^2)dx = e^x(2x + x^2) - \int(2 + 2x)e^x dx = 2xe^x + x^2e^x - (2 + 2x)e^x + \int 2e^x dx =$$

$$2xe^x + x^2e^x - 2e^x - 2xe^x + 2e^x + c = x^2e^x + c.$$

La famiglia delle primitive è dunque:

$$G(x) = x^2e^x + c.$$

Imponiamo al grafico di $G(x)$ il passaggio per il punto $(1; 2e)$:

$$G(1) = 2e \rightarrow e + c = 2e \rightarrow c = e.$$

La primitiva cercata è:

$$G(x) = x^2e^x + e.$$

9 Denotiamo con r_1 la retta espressa in forma parametrica e con r_2 quella in forma cartesiana e analizziamo la posizione reciproca tra le due rette e il punto P dato. Osserviamo che P non appartiene né a r_1, né a r_2, infatti, sostituendo a x, y, z, rispettivamente, i valori 1, 0, -2, entrambi i sistemi risultano impossibili. Per vedere se r_1 e r_2 sono coincidenti, incidenti o disgiunte (parallele o sghembe), studiamo il sistema seguente in 5 equazioni e 4 incognite:

$$\begin{cases} x = t \\ y = 2t \\ z = t \\ x + y + z - 3 = 0 \\ 2x - y = 0 \end{cases}.$$

Otteniamo:

$$\begin{cases} x = t \\ y = 2t \\ z = t \\ t + 2t + t - 3 = 0 \\ 2t - 2t = 0 \end{cases}.$$

da cui:

$$\begin{cases} x = t \\ y = 2t \\ z = t \\ t = \frac{3}{4} \end{cases}.$$

Poiché esiste ed è unico il valore di t per cui il sistema ha soluzione, possiamo concludere che r_1 ed r_2 sono incidenti e il loro punto d'intersezione è $Q\left(\frac{3}{4}; \frac{3}{2}; \frac{3}{4}\right)$.

Allora esiste un piano σ che contiene r_1 ed r_2. L'equazione del piano π passante per P e parallelo alle due rette è il piano per P parallelo a σ. Per calcolare l'equazione di σ possiamo procedere in due modi diversi.

Primo metodo: Consideriamo un piano generico espresso in forma cartesiana

$$ax + by + cz + d = 0, \qquad \text{con } (a; b; c) \neq (0; 0; 0)$$

e imponiamo il passaggio per r_1 ed r_2. Poiché r_1 ed r_2 sono incidenti e ogni retta è univocamente determinata da due suoi punti, è sufficiente imporre il passaggio del piano per Q, che appartiene ad entrambe, per un altro punto di r_1, ad esempio, $Q_1(0; 0; 0)$, e per un altro punto di r_2, ad esempio, $Q_2(0; 0; 3)$. Quindi studiamo il sistema:

$$\begin{cases} a \cdot \frac{3}{4} + b \cdot \frac{3}{2} + c \cdot \frac{3}{4} + d = 0 \\ a \cdot 0 + b \cdot 0 + c \cdot 0 + d = 0 \\ a \cdot 0 + b \cdot 0 + c \cdot 3 + d = 0 \end{cases}$$

da cui $a = -2b$, $c = d = 0$. Scegliendo $b = 1$, otteniamo $\sigma: 2x - y = 0$.

Secondo metodo: Consideriamo il fascio di piani passanti per r_2,

$$\sigma_{\lambda\mu}: \lambda(x + y + z - 3) + \mu(2x - y) = 0, \qquad \text{con } (\lambda; \mu) \neq (0; 0)$$

e imponiamo il passaggio per r_1. Poiché $Q = r_1 \cap r_2$, $Q_1(0; 0; 0) \in r_1$, per trovare σ, è sufficiente imporre il passaggio di $\sigma_{\lambda\mu}$ per Q_1, cioè studiare il seguente sistema:

$$\begin{cases} \lambda(x + y + z - 3) + \mu(2x - y) = 0 \\ x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

da cui $\lambda = 0$. Scegliendo $\mu = 1$, otteniamo $\sigma: 2x - y = 0$.
Ricordiamo che un piano $ax + by + cz + d = 0$ è perpendicolare al vettore $(a; b; c)$. Nel nostro caso, il piano $\sigma: 2x - y = 0$ è perpendicolare al vettore $(2; -1; 0)$. Di conseguenza, il piano π che stiamo cercando, deve essere perpendicolare allo stesso vettore, per poter essere parallelo a σ. Imponendo il passaggio per P:

$$\begin{cases} 2x - y + d = 0 \\ x = 1 \\ y = 0 \\ z = -2 \end{cases}$$

otteniamo $a = 2$; $b = -1$; $c = 0$; $d = -2$, cioè $\pi: 2x - y = 2$.

Alternativamente, scrivendo la retta r_2 in forma parametrica:

$$\begin{cases} x = s \\ y = 2s \\ z = 3 - 3s \end{cases}$$

osserviamo che r_2 è parallela al vettore $(1; 2; -3)$. Ricordando che r_1 è parallela al vettore $(1; 2; 1)$, il generico piano passante per P, cioè:

$$a(x-1) + b(y-0) + c(z+2) = 0; \qquad \text{con } (a; b; c) \neq (0; 0; 0)$$

è parallelo alle rette r_1 ed r_2 se il vettore $(x-1;\ y;\ z+2)$ è parallelo a $(1; 2; 1)$ e $(1; 2; -3)$. E questo è vero se e solo se

$$\begin{vmatrix} x-1 & y & z+2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix} = 0.$$

Sviluppando i calcoli, otteniamo come prima π: $2x - y - 2 = 0$.

10 L'equazione della retta tangente al grafico di una funzione $y = f(x)$ in un suo punto $(x_0; y_0)$ è della forma:

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0).$$

Nel nostro caso, $x_0 = \sqrt{e}$.
La funzione integrale $y = f(x)$ è continua e derivabile nel suo dominio.
Calcoliamo i valori di y_0 e $f'(x_0)$.
Per calcolare il valore di y_0 sostituiamo il valore $x_0 = \sqrt{e}$ e nell'equazione della funzione:

$$y_0 = f(x_0) = f(\sqrt{e}) = \int_e^e \frac{t}{\ln t}\,dt = 0.$$

Per calcolare il valore di $f'(x_0)$, calcoliamo la derivata di $y = f(x)$ applicando il teorema fondamentale del calcolo integrale e la regola di derivazione delle funzioni composte:

$$f'(x) = \frac{x^2}{\ln x^2} \cdot 2x = \frac{2x^3}{2\ln x} = \frac{x^3}{\ln x}.$$

Sostituiamo il valore $x_0 = \sqrt{e}$ nell'equazione della derivata:

$$f'(\sqrt{e}) = \frac{(\sqrt{e})^3}{\ln\sqrt{e}} = \frac{e\sqrt{e}}{\frac{1}{2}\ln e} = 2e\sqrt{e}.$$

L'equazione della retta tangente al grafico della funzione $y = f(x)$ nel punto $(\sqrt{e}; 0)$ è:

$$y - 0 = 2e\sqrt{e}(x - \sqrt{e}) \rightarrow y = 2e\sqrt{e}\,x - 2e^2.$$