Esame di Stato 2018/19

Soluzione problema 2 seconda prova

Alessandro Gambini[1], Elisa Garagnani[2], and Giovanni Organtini[3]

[1]Università di Bologna

[2]Istituto di Istruzione Superiore Archimede

[3]Sapienza Università di Roma

20 giugno 2019

Problema 2

Punto 1

Poiché a^2 si somma a t^2 è evidente che a deve avere le stesse dimensioni di t quindi si misura in secondi (s). Per determinare le dimensioni di k scriviamo la corrispondente equazione dimensionale come

$$[B] = [k]\frac{[TL]}{[T^3]}$$

essendo $[T]$ le dimensioni di t (è un tempo) e $[L]$ quelle di r (che è una lunghezza). A denominatore c'è un tempo al quadrato elevato al cubo, ma il tutto è sotto radice, quindi in effetti c'è un tempo al cubo. Otteniamo cosí

$$[k] = \frac{[BT^2]}{[L]}$$

perciò k si misura in Ts^2/m.

Nel condensatore, il campo magnetico è dovuto alla *corrente di spostamento* di Maxwell. Quando cambia la tensione ai capi del condensatore, cambia corrispondentemente il campo elettrico $\mathbf{E}$ al suo interno e, per il Teorema di Ampère generalizzato, si osserva un campo magnetico la cui circuitazione è pari a

$$\oint \mathbf{B} \cdot \mathrm{d}\mathbf{s} = \epsilon_0\mu_0\frac{\mathrm{d}\Phi(\mathbf{E})}{\mathrm{d}t}\,.$$

Qui $\Phi(\mathbf{E}) = \int_S \mathbf{E} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S}$ rappresenta il flusso del campo elettrico attraverso la superficie S che ha per contorno la curva lungo la quale si calcola la circuitazione.

Il campo elettrico nel condensatore a facce piane e parallele è perpendicolare alle armature, dunque il campo magnetico che si produce ha linee di forza circolari centrate sull'asse di simmetria del condensatore. Le direzioni dei due campi, quindi, sono perpendicolari.

Punto 2

Per quanto detto sopra, la circuitazione del campo magnetico nel condensatore è data dalla Legge di Maxwell che corrisponde al Teorema di Ampère in presenza di campi elettrici variabili, cioè

$$\oint \mathbf{B} \cdot \mathrm{d}\mathbf{s} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\mathrm{d}\Phi(\mathbf{E})}{\mathrm{d}t}\,.$$

Da questa possiamo ricavare che

$$\frac{\mathrm{d}\Phi(\mathbf{E})}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{\epsilon_0 \mu_0} \oint \mathbf{B} \cdot \mathrm{d}\mathbf{s}\,.$$

Poiché le linee di forza del campo sono circonferenze, la circuitazione lungo C è facile da calcolare perché in questo caso il campo magnetico è tangente allo spostamento lungo la circonferenza e il prodotto scalare nell'integrale si riduce al prodotto ordinario tra i moduli. L'integrale va esteso su tutta la circonferenza lungo la quale il campo magnetico ha intensità costante perciò

$$\oint \mathbf{B} \cdot \mathrm{d}\mathbf{s} = 2\pi r B\,.$$

Sostituendo l'espressione di B si ottiene

$$\frac{\mathrm{d}\Phi(\mathbf{E})}{\mathrm{d}t} = \frac{2\pi r}{\epsilon_0 \mu_0} \frac{kt}{\sqrt{(t^2+a^2)^3}} r\,.$$

Il flusso del campo elettrico si ottiene integrando entrambi i membri:

$$\Phi(\mathbf{E}) = \frac{2\pi r^2}{\epsilon_0 \mu_0} \int_0^t \frac{kt}{\sqrt{(t^2+a^2)^3}} \mathrm{d}t = -\frac{2\pi r^2}{\epsilon_0 \mu_0} \left(\frac{k}{\sqrt{t^2+a^2}} - \frac{k}{a} \right)\,.$$

Raccogliendo a fattor comune k si ottiene dunque

$$\Phi(\mathbf{E}) = \frac{2k\pi r^2}{\epsilon_0 \mu_0} \left(\frac{-1}{\sqrt{t^2+a^2}} + \frac{1}{a} \right)\,,$$

come volevasi dimostrare.

Poiché il campo elettrico in un condensatore piano è uniforme, il suo flusso attraverso una superficie circolare di raggio r a esso perpendicolare è semplicemente

$$\Phi(\mathbf{E}) = E\pi r^2$$

con E costante ed evidentemente pari a

$$E = \frac{\Phi(\mathbf{E})}{\pi r^2} = \frac{2k}{\epsilon_0 \mu_0} \left(\frac{-1}{\sqrt{t^2+a^2}} + \frac{1}{a} \right)\,.$$

Si ottiene dunque

$$V = Ed = \frac{2kd}{\epsilon_0 \mu_0} \left(\frac{-1}{\sqrt{t^2+a^2}} + \frac{1}{a} \right)\,.$$

Al tendere di t all'infinito, l'intensità del campo magnetico tende a zero. In effetti nell'espressione di B a numeratore c'è t, mentre a denominatore t è elevato al cubo, quindi cresce piú rapidamente di quanto faccia il numeratore e complessivamente il risultato è nullo.

Questo avviene perché il campo magnetico è presente solo in presenza di una variazione del campo elettrico tra le armature che, a sua volta, si ha quando varia la differenza di potenziale ai capi del condensatore. Dall'espressione di V si vede che, per $t = 0$ i due addendi tra parentesi si elidono a vicenda e $V = 0$. Al crescere di t, anche V cresce, tendendo a un valore che è quello che corrisponde al caso in cui l'addendo a sinistra si annulla, perciò

$$\lim_{t\to\infty} V = \frac{2kd}{a\epsilon_0 \mu_0}\,.$$

In definitiva, per t che tende a infinito, V tende a una costante e quindi anche E risulta tendere a una costante, il che significa che la sua derivata tende a zero. Se quindi E non varia, non si osserva alcun campo magnetico indotto, come risulta dal calcolo analitico.

Punto 3

La funzione $F(t)$ passa per l'origine in quanto $F(0) = 0$; inoltre,

$$F'(t) = -\frac{t}{\sqrt{(a^2+t^2)^3}} = f(t).$$

$F(t)$ è una funzione pari in quanto $F(t) = F(-t)$ e $F(t) \leq 0$ per ogni $t \in \mathbb{R}$ e per ogni $a > 0$, in quanto

$$\frac{1}{\sqrt{t^2+a^2}} \leq \frac{1}{a}.$$

La funzione è definita su tutto $\mathbb{R}$ e non ha asintoti verticali. D'altra parte

$$\lim_{t\to\pm\infty} F(t) = -\frac{1}{a}$$

quindi ha un asisntoto orizzontale di equazione $y = -\frac{1}{a}$. Essendo la funzione continua, due volte derivabile, pari e non positiva, possiamo dedurre che possiede un massimo assoluto nell'origine e almeno due punti di flesso simmetrici rispetto all'origine.

La derivata prima è $f(t)$ che è quindi positiva per $t < 0$ e negativa per $t > 0$; $F(x)$ pertanto non possiede minimo assoluto.

La derivata seconda di F consente di individuare i punti di flesso:

$$F''(t) = f'(t) = \frac{2t^2 - a^2}{\sqrt{(a^2+t^2)^5}}.$$

La funzione è convessa per $t < -\frac{\sqrt{2}}{2}a \ \vee t > \frac{\sqrt{2}}{2}a$ ed è concava per $-\frac{\sqrt{2}}{2}a < t < \frac{\sqrt{2}}{2}a$ presentando quindi i due flessi nei punti di ascissa $x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}a$. Sostituendo le coordinate dei flessi nella derivata prima si ottengono le pendenze delle rette tangenti:

$$f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}a\right) = \frac{2\sqrt{3}}{9a^2}; \qquad f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}a\right) = -\frac{2\sqrt{3}}{9a^2}.$$

Punto 4

Il grafico di f può essere dedotto come in figura dal grafico di F. La funzione F cresce fino a $x = 0$ e poi descresce, quindi il grafico di f è positivo per $x < 0$ e negativo per $x > 0$. Poiché F è una funzione pari, la sua derivata è una funzione dispari. I punti di flesso rappresentano i punti di massima pendenza (positiva o negativa) per la funzione F che quindi sono punti di massimo o minimo relativo per la derivata prima f. Infine, poiché la funzione F tende a un asintoto orizzontale per $x \to \pm\infty$, la sua derivata tende a 0 per $x \to \pm\infty$.

Essendo la funzione f dispari,

$$\int_{-b}^{b} f(t)\mathrm{d}t = 0$$

per ogni scelta di $b > 0$. L'area della regione di piano compresa tra il grafico di f, l'asse delle ascisse e le rette parallele all'asse delle ordinate passanti per gli estremi della funzione è:

$$2\int_{-\frac{\sqrt{2}}{2}a}^{0} f(t)\mathrm{d}t = 2\left[\frac{1}{\sqrt{t^2+a^2}}\right]_{-\frac{\sqrt{2}}{2}a}^{0} = \frac{2}{a}\left(1 - \sqrt{\frac{2}{3}}\right).$$

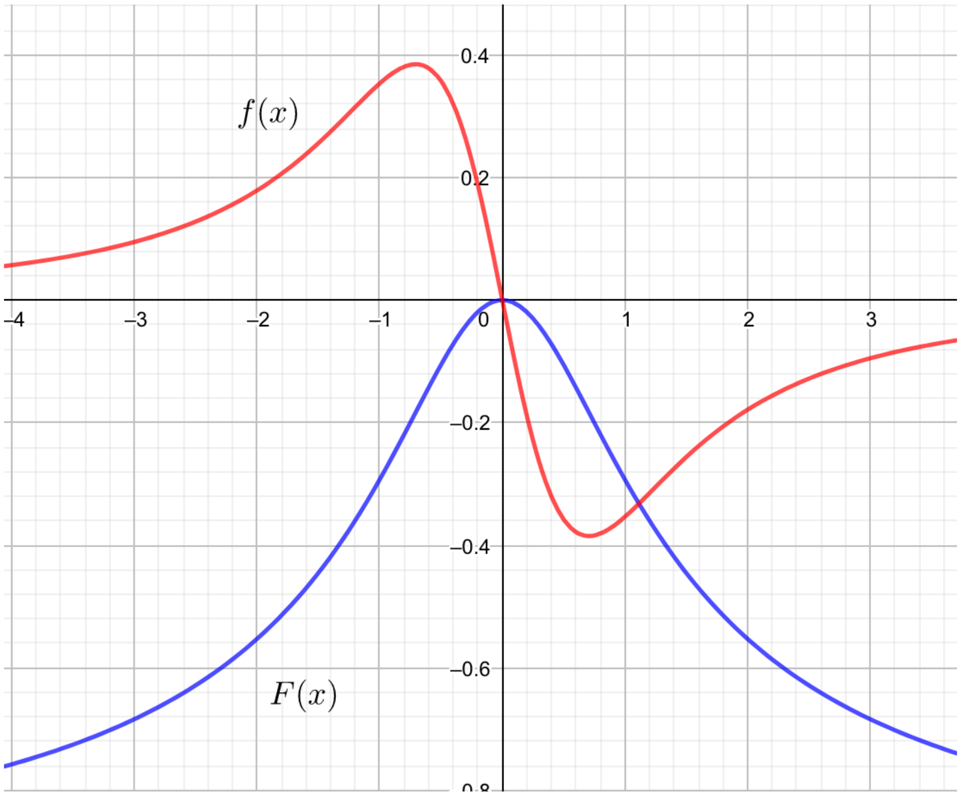

Figura 1: Grafico di f e F per $a = 1$